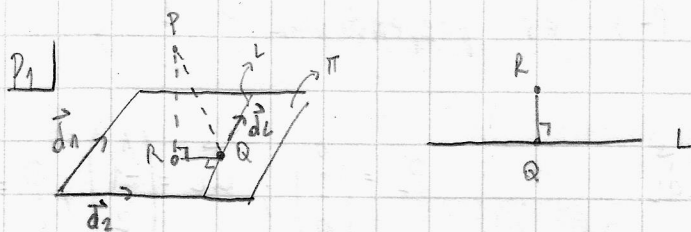


DESARROLLO AUXILIAR 5



Debido a que R es la proyección de P sobre el plano Π , $P-R$ es un vector normal al plano, es decir $\langle P-R, \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 \rangle = 0 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Por otro lado Q es la proyección de P sobre L por lo tanto $P-Q$ es perpendicular a $L \Rightarrow \langle P-Q, \vec{d}_L \rangle = 0$

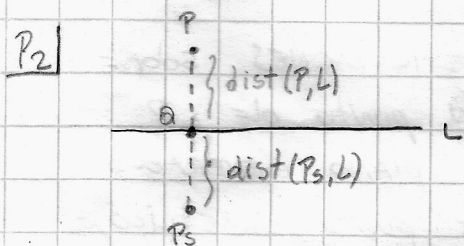
Restando ambas proposiciones tenemos

$$\langle P-R, \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 \rangle - \langle P-Q, \vec{d}_L \rangle = 0 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Ahora, tomando λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 = \vec{d}_L$, lo cual se puede hacer porque L pertenece al plano, entonces su vector director es paralelo a una combinación lineal de los otros dos.

$$\Rightarrow \langle P-R, \vec{d}_L \rangle - \langle P-Q, \vec{d}_L \rangle = 0 \Rightarrow \langle Q-R, \vec{d}_L \rangle = 0$$

Lo cual permite concluir que la recta que pasa por R y Q es perpendicular a L .



a) Como $P_S \in L_{PQ}$ (L_{PQ} es la recta que une a P con Q) $P_S = P + \lambda(P-Q)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
Además, como $\text{dist}(P, L) = \text{dist}(P_S, L)$

Tenemos que $\|P-Q\| = \|P_S-Q\|$ y juntando ambas proposiciones.

$$\|P-Q\| = \|P + \lambda(P-Q) - Q\| = \|P-Q\| = \|(1+\lambda)(P-Q)\| = |(1+\lambda)| \|P-Q\|$$

Asumiendo que $P-Q \neq 0$, $|1+\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = 0$

Si $\lambda = 0 \Rightarrow P_S = P$, que por definición asumimos que no es

Si $\lambda = -2 \Rightarrow P_S = P - 2(P-Q)$, como es la única opción restante la tomamos como válida lo cual concluye lo pedido.

b) Q es un punto que satisface que P-Q es perpendicular a L y que Q pertenece a L, es decir:

$$\langle P-Q, \vec{d}_L \rangle = 0 \quad y \quad Q = P_L + \lambda \vec{d}_L \quad P_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{d}_L = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle P - P_L - \lambda \vec{d}_L, \vec{d}_L \rangle = 0 \Rightarrow \langle P - P_L, \vec{d}_L \rangle - \lambda \langle \vec{d}_L, \vec{d}_L \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle P - P_L, \vec{d}_L \rangle = \lambda \|\vec{d}_L\|^2; \quad \text{como } \vec{d}_L \neq 0 \text{ (LA RECTA SE DEFINE ASÍ)}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\langle P - P_L, \vec{d}_L \rangle}{\|\vec{d}_L\|^2} \Rightarrow Q = P_L + \lambda \vec{d}_L = P_L + \frac{\langle P - P_L, \vec{d}_L \rangle}{\|\vec{d}_L\|^2} \cdot \vec{d}_L$$

$$\text{Por (a)} \quad P_S = P + 2(Q - P) = 2Q - P = 2 \left(P_L - \frac{\langle P - P_L, \vec{d}_L \rangle}{\|\vec{d}_L\|^2} \vec{d}_L \right) - P$$

$$\text{REEMPLAZANDO NUMERICAMENTE} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_S = 2Q - P = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) PARA RESOLVER ESTE PROBLEMA DEBEMOS ENCONTRAR RESTRICCIONES SOBRE LOS PUNTOS P_S QUE SON PUNTOS SIMÉTRICOS DE ALGÚN PUNTO DE P.

ESTA RESTRICCIÓN ES QUE $P_S \in \Pi_P$ (Π_P EL PLANO GENERADO POR LOS PUNTOS SIMÉTRICOS) SI Y SOLO SI P_S ES PUNTO SIMÉTRICO DE P CON $P \in \Pi$

Es decir $P_S = P + 2(Q - P)$ con $P \in \Pi$, Q LA PROYECCIÓN SOBRE L DE P
AHORA, $P \in \Pi \Rightarrow 3x - 2y + 5z = 1 \Rightarrow 2y = 3x + 5z - 1; \quad 2x = 2s; \quad 2z = 2t$

$$\Rightarrow 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

CAMBIAMOS EL VECTOR POSICIÓN POR UNO MÁS BONITO

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1+2s \\ 1+3s+5t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Luego $P_S = 2Q - P$ con $Q = P_L + \frac{\langle P - P_L, dL \rangle}{\|dL\|^2} dL$ $P_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $dL = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{6} \left(\begin{pmatrix} 1+2s \\ 1+3s+5t \\ 2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+2s \\ 1+3s+5t \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} (1+2s - 5t - 3s + 1 + 4t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+2s \\ 1+3s+5t \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} (2 - s - t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3+6s \\ 3+9s+15t \\ 6t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 2-s-t \\ s+t-2 \\ 4-2s-2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3+6s \\ 3+9s+15t \\ 6t \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5-7s-t \\ -5-8s-14t \\ 4-2s-8t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/3 \\ 7/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7/3 \\ -8/3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/3 \\ -14/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}$$

B) a) Recordando la propiedad $v_1 \times v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = \lambda v_2$ es decir son paralelos

TENEMOS QUE $x \in L \Leftrightarrow (x-p) \times d = 0 \Leftrightarrow x-p = \lambda d \Leftrightarrow x = p + \lambda d$, lo cual concluye lo pedido.

b) PRIMERO DETERMINAMOS $L \cap \Pi$ COMO LOS x QUE CUMPLEN LAS CONDICIONES PARA ESTAR EN L Y Π , ES DECIR

$$(x-p) \times d = 0 \quad \wedge \quad \langle x, n \rangle = 0$$

COMO VIMOS EN (a) $(x-p) \times d = 0 \Leftrightarrow x = p + \lambda d$ PARA ALGÚN $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x \in L \cap \Pi \Leftrightarrow x = p + \lambda d \quad \wedge \quad \langle x, n \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle p + \lambda d, n \rangle = 0$$

LUEGO SI NO EXISTE $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\langle p + \lambda d, n \rangle = 0$ ENTONCES NO EXISTIRÁ $x \in L \cap \Pi$ i.e. $L \cap \Pi = \emptyset$

⇒ PARA P QUE NO EXISTA λ SE PIDE QUE LA ECUACIÓN

$$0 = \langle p + \lambda d, u \rangle \text{ NO TENGA SOLUCIÓN PARA } \lambda.$$

$$\Leftrightarrow -\langle p, u \rangle = \lambda \langle d, u \rangle \text{ NO TENGA SOLUCIÓN PARA } \lambda$$

$$\Leftrightarrow \langle d, u \rangle = 0 ; \langle p, u \rangle \neq 0$$