Resolución Alternativa P3 Aux 4

Sean $\Pi, L \subseteq \mathbb{R}^3$ un plano y una recta definidas por:

$$\Pi: x + \alpha y - \beta z = 1 \quad ; \quad L: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \gamma \in \mathbb{R}$$

Encontrar como α y β determinan al conjunto $L \cap \Pi$

Una forma de interpretar este problema, es considerar que $L \cap \Pi$ es el conjunto de los $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen las ecuaciones cartesianas de la recta y del plano (recordemos que satisfacer la ecuación cartesiana implica pertenecer al espacio). Entonces, tendremos un sistema de ecuaciones y por ejemplo cuando queremos que $L \cap \Pi$ sea un solo punto estaremos buscando que este sistema tenga solución única.

Primero, pasamos la recta a sus ecuaciones cartesianas

$$L: \underbrace{\begin{aligned} x &= 1 + 2\gamma \\ y &= -1 - \gamma \\ z &= 3 + 2\gamma \end{aligned}}_{\text{Ec paramétricas}} \implies \underbrace{\begin{aligned} x - z &= -2 \\ x + 2y &= -1 \end{aligned}}_{\text{Ec. cartesianas}}$$

Entonces tenemos para $L \cap \Pi$ al sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ x + \alpha y - \beta z &= 1 \\ x - z &= -2 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & \alpha & -\beta & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) = (A|b)$$

Luego resolvemos nuestro sistema:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha-2 & -\beta & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha-2 & -\beta & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\beta-\frac{\alpha}{2}+1 & 2-\frac{\alpha}{2}+1 \end{array}\right)$$

ENTONCES;

- L corta a Π en un solo punto si $L \cap \Pi$ tiene solución única, es decir $-\beta - \frac{\alpha}{2} + 1 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 2(1-\beta)$

- $L \subseteq \Pi$ si es que el sistema tiene infinitas soluciones, lo cual se logra cuando la última fila son solo ceros

$$\Rightarrow \alpha = 2(1-\beta) \quad y \quad 3 - \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = 6 \Rightarrow \beta = -2$$

- $L \not\subseteq \Pi$ y L paralelo a Π si es ningun punto de L pertenece a Π, es decir $L \cap \Pi = \phi$ por lo tanto nuestro sistema no tiene solución, lo cual se da para:

$$\alpha = 2(1-\beta) \quad y \quad 3 - \frac{\alpha}{2} \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 6$$

Lo cual nos da los mismos resultados que en el desarrollo que hicimos en la clase auxiliar

Nota: Este desarrollo solo sirve para conocer a $L \cap \Pi$, por lo que no nos sirve para determinar si L es perpendicular a Π por lo cual no podemos resolver todo el problema.