

DESARROLLO AUXILIAR 4

P_1 (a) SIMPLEMENTE DEBEMOS CONSIDERAR LA IGUALDAD PARA $\vec{v} \in \pi$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 5 + 3s + 2t \\ y &= -1 + s + 2t \\ z &= 0 + 4s + t \end{aligned}$$

TENEMOS 3 ECUACIONES Y 5 INCOGNITAS, SI ELIMINAMOS s Y t , TENDREMOS ECUACIONES PARA x, y, z QUE DETERMINAN EL PLANO QUE SE DENOMINAN CARTESIANAS.

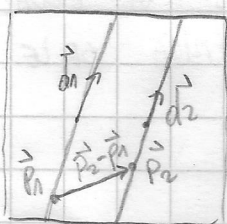
$$\Rightarrow \begin{aligned} x - y &= 6 + 2s & \Rightarrow 5(x - y) + 2(x - 2z) &= 30 + 10s + 10 - 10s = 40 \\ x - 2z &= 5 - 5s \end{aligned}$$

SE CONCLUYE QUE LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL PLANO ES:

$$7x - 5y - 4z = 40$$

(b) DOS RECTAS SON PARALELAS SI ES QUE SUS VECTORES DIRECTORES SON PARALELOS, ENTONCES, SE VE QUE $\vec{d}_1 = 2\vec{d}_2$.

EL PLANO QUE LAS CONTIENE DEBEMOS ENCONTRARLO BUSCANDOS 2 VECTORES DIRECTORES. VIENDO AL PLANO CON SUS DOS RECTAS



$$\text{COMO } \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ NO ES PARALELO A } \vec{d}_1$$

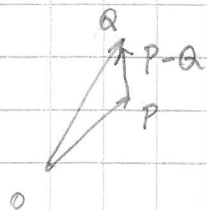
Y SE MUEVE A LO LARGO DEL PLANO, PODEMOS TOMARLO COMO VECTOR DIRECTOR

Por último tomando como vector posición a $\vec{p}_1$ (Podemos tomar a $\vec{p}_2$ o cualquier punto del plano) TENEMOS LA ECUACIÓN VECTORIAL del plano

$$\pi_0: \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ PARA ALGÚN } s, t \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi_0$$

(c) BASTA CON PROBAR QUE EL PUNTO R NO PERTENECE A LA RECTA ENTRE P Y Q

EN EFECTO LA RECTA ENTRE P Y Q (QUE LLAMAREMOS L) QUEDA DEFINIDA POR EL VECTOR DIRECTOR (Q-P) Y EL POSICIÓN P.



$$\Rightarrow L: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

LUEGO SI $R \in L$ ENTONCES EXISTIRÍA t_R ~~ta~~ $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t_R \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

REEMPLAZANDO $R = (1, 3, 3)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 1 &= 3t_R & \Rightarrow t_R &= \frac{1}{3} ; t_R = 2 ; t_R = 0 \Rightarrow \text{NO EXISTE } t_R \\ 3 &= 1 + t_R \\ 3 &= 4 - t_R \end{aligned}$$

SE CONCLUYE QUE R NO PERTENECE A L, ES DECIR SON PUNTOS NO COLINEALES

(d) TENEMOS LA ECUACIÓN CARTESIANA $8x + 9y + z = 5$

CON ELLA, DESPEJAREMOS UNA VARIABLE Y ESCRIBIREMOS LA ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO, LUEGO DE LA VECTORIAL LA PARAMÉTRICA SALE DE FORMA DIRECTA

ENTONCES, DE LA ECUACIÓN $z = 5 - 8x - 9y$

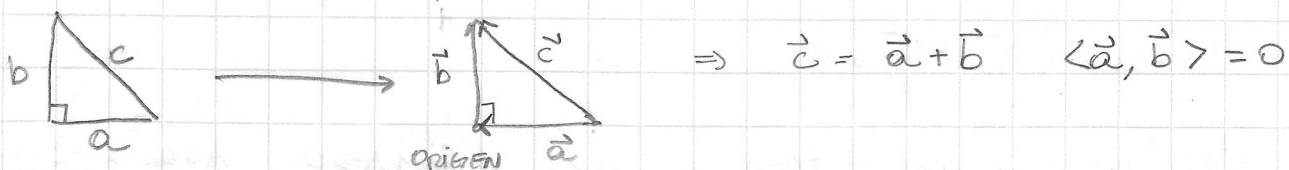
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5 - 8x - 9y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

LUEGO, PODEMOS TOMAR A X E Y COMO NUESTROS PARÁMETROS S Y t

$$\Rightarrow x = s ; y = t ; z = 5 - 8s - 9t$$

LO CUAL NOS DA EL PLANO EXPRESADO EN FORMA PARAMÉTRICA

P2] (a) PARA HACER ESTO, DEBEMOS TRANSFORMAR LOS LADOS DE UN TRIANGULO EN 3 VECTORES



LUEGO $\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$

$$\Rightarrow \|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \underbrace{2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_0 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$$

COMO LOS MODULOS DE LOS VECTORES SON LOS LARGOS DE LOS LADOS, CONCLUIMOS QUE $c^2 = a^2 + b^2$.

(b) CONSIDERANDO QUE $\cos \theta_n = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}} \quad \begin{matrix} a_i = 1 \\ b_i = i \end{matrix}$

$$\Rightarrow \cos \theta_n = \frac{\sum_{i=1}^n i}{\left(\sum_{i=1}^n 1\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n i^2\right)^{1/2}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^{1/2} \cdot \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \cos \theta_n = \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\frac{(n+1)^2}{(n+1)(2n+1)} \right]^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_n \rightarrow \frac{\pi}{6}$$

(c) Pde $\|a + \lambda b\| \leq \|a\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a$ y b son ortogonales

DESARROLLANDO POR DOBLE IMPLICANCIA

$$\Leftrightarrow \langle a, b \rangle = 0 \Rightarrow \langle a, \lambda b \rangle = 0 \Rightarrow \langle a + \lambda b, a + \lambda b \rangle = \|a\|^2 + \underbrace{2\lambda \langle a, b \rangle}_0 + \lambda^2 \|b\|^2$$

$$\Rightarrow \|a + \lambda b\|^2 = \|a\|^2 + \lambda^2 \|b\|^2 \geq \|a\|^2 \quad \text{COMO } \|x\| > 0, \text{ podemos concluir que:}$$

$$\|a + \lambda b\| \geq \|a\|$$

$\Rightarrow$ Si $\|a + \lambda b\| \geq \|a\| \Rightarrow \|a + \lambda b\|^2 \geq \|a\|^2$ como vimos $\|a + \lambda b\|^2 = \|a\|^2 + 2\lambda \langle a, b \rangle + \lambda^2 \|b\|^2$

$$\Rightarrow 2\lambda \langle a, b \rangle + \lambda^2 \|b\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \|b\|^2 \geq -2\lambda \langle a, b \rangle \quad \text{tomando } \lambda > 0 \text{ y } \lim \lambda \rightarrow 0 \quad \lambda \|b\|^2 \geq -2 \langle a, b \rangle$$

$$\rightarrow 0 \geq -2 \langle a, b \rangle$$

$$\text{tomando } \lambda < 0 \text{ y } \lim \lambda \rightarrow 0 \quad \lambda \|b\|^2 \leq -2 \langle a, b \rangle$$

$$\rightarrow 0 \leq -2 \langle a, b \rangle$$

$$\rightarrow 0 \leq -2 \langle a, b \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle a, b \rangle = 0 \Rightarrow a \text{ y } b \text{ son ortogonales}$$

P3 PRIMERO, DEFINIMOS AL PLANO EN FORMA VECTORIAL PARA PODER TRABAJAR CON AMBOS SUBCONJUNTOS EN EL MISMO FORMATO

$$\text{COMO } x = 1 - \alpha y + \beta z \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{s}_{d_1} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{t}_{d_2} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LUEGO ESTUDIAMOS CADA CASO.

i) L CORTE A Π EN UN PUNTO

PARA QUE ESTO OCURRA EXIGIMOS QUE EL VECTOR DIRECTOR DE LA RECTA, NO SEA PARALELO A UNA COMBINACIÓN LINEAL DE LOS VECTORES DIRECTORES

$$\text{ES DECIR: } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda_1 \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 \neq -\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta & \vee \\ -1 \neq \lambda_1 & \vee \\ 2 \neq \lambda_2 & \end{matrix}$$

$$\text{COMO LO TENEMOS } \forall \lambda_1, \lambda_2 \text{ podemos tomar } \lambda_1 = -1 \wedge \lambda_2 = 2$$

$$\Rightarrow 2 \neq +\alpha + 2\beta \Rightarrow \alpha \neq 2(1 - \beta)$$

(SI TOMAMOS $\lambda_1 \neq -1$ O $\lambda_2 \neq 2$ AL TIRO SE TENDRA LA INEQUIDAD, PUES HAY QUE RECORDAR QUE UN VECTOR ES DISTINTO A OTRO SI CUALQUIERA DE SUS COMPONENTES ES DISTINTA)

ii) PARA QUE L SEA PERPENDICULAR AL PLANO, EXIGIMOS QUE SU VECTOR DIRECTOR SEA PARALELO AL VECTOR NORMAL AL PLANO, ES DECIR:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{n} \quad \text{CON} \quad \vec{n} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = \lambda \\ -1 = \lambda \alpha \\ 2 = -\lambda \beta \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = -1 \end{array}$$

iii) NECESITAMOS DOS COSAS, QUE EL VECTOR DIRECTOR DE LA RECTA SEA UNA COMBINACIÓN LINEAL DE LOS VECTORES DIRECTORES DEL PLANO, ASÍ LA RECTA SE MOVERA EN UNA DIRECCIÓN CONTENIDA POR EL PLANO Y, ADÉMÁS QUE UN PUNTO P DE LA RECTA ESTE TAMBIÉN EN EL PLANO. ES DECIR, SI LLAMAMOS $\vec{d}_L$ AL VECTOR DIRECTOR DE LA RECTA ENTONCES:

$$\vec{d}_L = \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 \quad \wedge \quad P \in L \cap \Pi$$

AHORA, ¿POR QUÉ NECESITAMOS ESTO? PORQUE SE PUEDE VER QUE SI DEFINIMOS A L COMO:

$$L := P + \alpha \vec{d}_L \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + \alpha \vec{d}_L \quad \text{PARA ALGÚN } \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + \alpha (\lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2) = P + \underbrace{\alpha \lambda_1}_{\tilde{\lambda}_1} \vec{d}_1 + \underbrace{\alpha \lambda_2}_{\tilde{\lambda}_2} \vec{d}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi$$

ES DECIR, CON ESTAS DOS CONDICIONES $L \subseteq \Pi$ (LO QUE QUEREMOS) CONTINUANDO, P PUEDE SER CUALQUIER PUNTO DEBIDO A QUE EL HECHO DE QUE UN PUNTO PERTENECE Π IMPLICARA QUE TODA LA RECTA PERTENECE.

EN PARTICULAR, TOMAREMOS $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

LUEGO NUESTRAS CONDICIONES SE REDUCEN A:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \quad \vec{d}_L = \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \pi \Leftrightarrow \exists s, t \neq 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual se traduce en las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} 2 = -\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta & 1 = 1 - \alpha s + \beta t \\ -1 = \lambda_1 & ; \quad -1 = s \\ 2 = \lambda_2 & 3 = t \end{array}$$

$$\Rightarrow 2 = \alpha + 2\beta \quad ; \quad \alpha = \alpha + \alpha + 3\beta$$

$$\Rightarrow \beta = -2 \quad ; \quad \alpha = 6$$

iv) Es ANALOGO A LA PARTE ANTERIOR, SOLO QUE AHORA EXIGIMOS QUE P NO PERTENEZCA AL PLANO π

(SE PUEDE DEMOSTRAR QUE SI $\vec{d}_L$ ES COMBINACIÓN LINEAL DE $\vec{d}_1$ Y $\vec{d}_2$ Y P NO PERTENECE A π ENTONCES TODA LA RECTA NO PERTENECE A π , DE FORMA ANALOGA A LO QUE VIMOS EN (iii))

LUEGO, NUESTRAS CONDICIONES SON

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \quad \vec{d}_L = \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 \wedge \forall s, t \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TOMANDO $t = 3$; $s = -1$ (PODEMOS TOMAR ESTOS POR QUE EXIGIMOS PARA TODAS)

$$\Rightarrow 2 = \alpha + 2\beta \quad \wedge \quad (0 \neq \alpha + 3\beta \Leftrightarrow \beta \neq -2)$$