Desarrollo Auxiliar 3

P1) Para calcular, podemos aplicar el método de Gauss, que consiste en multiplicar por matrices elementales el sistema aumentado $(A|I)$ hasta llegar a $(I|X)$, lo cual nos permite afirmar que X es la inversa de A.

Esto debido a que si transformamos a A en la identidad, habremos multiplicado por la inversa de A y como en el lado derecho teníamos la identidad ahí guardaremos el producto de las matrices elementales, es decir la inversa de A.

Esto llevado al problema sería así:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{E_{13}(-1) \\ E_{12}(2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{23}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{E_{31}(\frac{-1}{4}) \\ E_{32}(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/4 & -1/4 & 7/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{diag}(1,1,\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/4 & -1/4 & 7/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

Lo cual nos permite concluir que

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 7 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P2)

(a) Pdq $Ax=b$ tiene solución única $\Leftrightarrow$ A es invertible

Demostraremos por doble implicancia

$\Leftarrow$) Si A es invertible, podemos multiplicar por A^{-1} la ecuación

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$ $\Rightarrow$ x satisface una ecuación que lo determina

$\Rightarrow$ $Ax=b$ tiene solución única $x=A^{-1}b$

$\Rightarrow$) Consideremos la contrarecíproca, es decir,

A no invertible $\Rightarrow$ $Ax=b$ no tiene solución única

Si A no es invertible, tenemos que por método de Gauss, al pivotearla hay en su diagonal un término distinto de cero, esto implica directamente que no hay solución única como vimos en el auxiliar 2.

(b) La matriz tendrá una forma general

$$A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet}=A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix} \Rightarrow E_{ij}(-1)A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet}-A_{i\bullet}=0 \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}$$

Luego, como $E_{ij}(-1)$ es invertible, tenemos que $E_{ij}(-1)\cdot A$ es invertible si y solo si A es invertible

Esto se tiene pues $E_{ij}(-1)A\cdot((E_{ij}(-1)A)^{-1} = I$ $\quad / E_{ij}(1)\cdot$

$\Leftrightarrow$ $A\cdot(E_{ij}(-1)\cdot A)^{-1} = E_{ij}(1)$ $\quad /\cdot E_{ij}(-1)$

$\Leftrightarrow$ $A\cdot(E_{ij}(-1)\cdot A)^{-1}\cdot E_{ij}(-1) = I$

$\Leftrightarrow$ A es invertible

Pero $E_{ij}(-1)A$ tiene una fila de ceros por lo que inmediatamente su matriz escalonada tiene una fila de ceros $\Rightarrow (E_{ij}(-1)\cdot A)x = b$ no tiene solución única, lo cual por (a) nos dice que $E_{ij}(-1)A$ no es invertible

Se concluye que A no es invertible por la equivalencia anterior.

(c) Como una matriz triangular superior es igual a su matriz escalonada, sale directo del hecho de que

A invertible $\Leftrightarrow \tilde{A}$ tiene su diagonal toda distinta de cero

resultado que se encuentra en el apunte

En este caso tenemos $A = \tilde{A}$ y $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$

$\Rightarrow$ A es invertible

Luego, podemos verificar que al aplicar método de Gauss sobre una matriz triangular superior solo debemos multiplicar por matrices elementales de la forma $E_{ij}(\lambda)$ con $j > i$ y una diagonal, es decir:

$$\left(A \mid I \right) \rightsquigarrow \left(I \,\middle|\, D \prod_{j>i} E_{ij}(\lambda) \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = D \cdot \prod_{j>i} E_{ij}(\lambda)$$

Ahora, como E_{ij} es triangular superior si es que $j > i$, tenemos que A^{-1} es la multiplicación de triangulares superiores entonces A^{-1} es triangular superior

(Si U_1, U_2 son triangulares superiores $U_1 U_2$ es triangular superior es un resultado que se puede comprobar por definición de multiplicación de matrices. Dartnell me dijo que lo propuso así que aquí lo uso como conocido)

P3 QUEREMOS VER QUE $A = LDU$ Y DE MOMENTO, TENEMOS LA INFORMACIÓN DE QUE PARA PIVOTEAR A SOLO MULTIPLICAMOS POR MATRICES $E_{ij}(\lambda)$ (PUES NO CAMBIAMOS FILAS), ES DECIR:

$$\prod E_{ij}(\lambda)\, A = \tilde{A}$$ PERO COMO $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$

MULTIPLICANDO POR $\prod E_{ij}(-\lambda)$ TENEMOS INMEDIATAMENTE QUE:

$$A = \prod E_{ij}(-\lambda) \cdot \tilde{A}$$ CON $\tilde{A}$ TRIANGULAR SUPERIOR Y $\prod E_{ij}(-\lambda)$ TRIANGULAR INFERIOR POR SER MULTIPLICACIÓN DE MATRICES TRIANGULAR INFERIOR

ENTONCES, YA TENEMOS UNA GRAN PARTE DE LA DEMOSTRACIÓN

AHORA, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ & \ddots & \\ & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$ CON $\tilde{a}_{ii} \neq 0$ POR ENUNCIADO

LO QUE SIGNIFICA QUE PODEMOS DIVIDIR $\tilde{A}$ EN:

$$\tilde{A} = \underbrace{\mathrm{diag}(\tilde{a}_{11}, \ldots, \tilde{a}_{nn})}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{\tilde{a}_{12}}{\tilde{a}_{11}} & \cdots & \frac{\tilde{a}_{1n}}{\tilde{a}_{11}} \\ 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \frac{\tilde{a}_{(n-1)n}}{\tilde{a}_{(n-1)(n-1)}} \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

LO CUAL NOS DA A LAS MATRICES D Y U, ENTONCES SI $\prod E_{ij}(\lambda)$ TUVIERA SU DIAGONAL CON UNOS ENTONCES LA PODRÍAMOS LLAMAR L Y TERMINARÍAMOS LA DEMOSTRACIÓN

EN EFECTO, SI TENEMOS X, Y TRIANGULARES INFERIORES, ENTONCES $X_{ij} = Y_{ij} = 0$ SI $i < j$

$$\Rightarrow (XY)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj} = \sum_{k=j}^{i} x_{ik} y_{kj} \Rightarrow (XY)_{ii} = x_{ii} \cdot y_{ii}$$

LUEGO, COMO LAS MATRICES E_{ij} SON TRIANGULARES INFERIORES

$$\left[\prod E_{ij}(\lambda)\right]_{\ell\ell} = \prod \left(E_{ij}(\lambda)_{\ell\ell}\right) = 1 \Rightarrow$$ LA DIAGONAL DE $\prod E_{ij}$ SON UNOS

SE CONCLUYE QUE EXISTE UNA DESCOMPOSICIÓN LDU

Ahora falta que esta descomposición sea única.

En efecto, como L y U son triangulares y con diagonal sin ceros por lo visto en la $P_2(c)$ son invertibles

Luego, si tuvieramos dos descomposiciones LDU, es decir

$A = L_1 D_1 U_1 = L_2 D_2 U_2$ podemos llamar a $D_1 U_1 = S_1$ y a $D_2 U_2 = S_2$

Con S_1 y S_2 triangulares superiores e invertibles por ser múltiplicación de triangulares superiores invertibles

$$\Rightarrow L_1 S_1 = L_2 S_2 \quad / L_1^{-1} \cdot \quad / \cdot S_2^{-1} \Rightarrow S_1 \cdot S_2^{-1} = L_2 L_1^{-1}$$

Pero $L_2 L_1^{-1}$ triangular inferior con diagonal de unos y $S_1 \cdot S_2^{-1}$ triangular superior

La única matriz que satisface ambas condiciones es la identidad $\Rightarrow L_2 L_1^{-1} = S_1 S_2^{-1} = I$, lo cual por unicidad de la inversa, nos dice que

$$L_2 = L_1 \wedge S_1 = S_2 \Rightarrow D_1 U_1 = D_2 U_2$$

Como la diagonal de $D_n U_n$ es D_n, tenemos que $D_1 = D_2$, ahora como D tiene su diagonal distinta de cero sabemos que D es invertible

$$\Rightarrow D U_1 = D U_2 \quad / D^{-1} \Rightarrow U_1 = U_2$$

Con lo cual concluimos la unicidad de la demostración

(b) $A = A^t \Rightarrow LDU = U^t D^t L^t = A$, como la descomposición es única,

$$L = U^t, \ D = D^t \ \text{y} \ U = L^t \quad //$$

P4)

(a) $(MD)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} D_{kj}$ como $D_{kj} = \begin{cases} D_{jj} & \text{si } k=j \\ 0 & \text{si NO} \end{cases}$

$\Rightarrow (MD)_{ij} = M_{ij} \cdot D_{jj}$, luego, $(DM)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik} M_{kj} = D_{ii} \cdot M_{ij}$

$\Rightarrow MD = DM \Rightarrow M_{ij} \cdot D_{jj} = D_{ii} \cdot M_{ij} \Rightarrow M_{ij}(D_{jj} - D_{ii}) = 0$

Pero $D_{jj} - D_{ii}$ son distintos si $i \neq j \Rightarrow M_{ij} = 0$ si $i \neq j$ es decir M es una matriz diagonal

(b) En efecto $AB = SS^{-1} \cdot A \cdot SS^{-1} \cdot BSS^{-1}$
y como el producto de matrices diagonales conmuta
$\Rightarrow (S^{-1}AS) \cdot (S^{-1}BS) = (S^{-1}BS) \cdot (S^{-1} \cdot AS)$

$\Rightarrow AB = S \cdot (S^{-1}BS) \cdot (S^{-1}AS) \cdot S^{-1} = BA$

(c) si $AB = BA \Rightarrow S(S^{-1}AS)(S^{-1}BS)S^{-1} = S(S^{-1}BS)(S^{-1}AS)S^{-1}$

multiplicando por S^{-1} por la izquierda y S por la derecha tendríamos que:

$(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) = (S^{-1}BS)(S^{-1}AS)$ lo cual permite concluir que estas matrices conmutan.

Luego, como $S^{-1}AS = D$ tenemos que

$D(S^{-1}BS) = (S^{-1}BS)D$, lo cual por (a) permite concluir que $S^{-1}BS$ es diagonal