Auxiliar 4: Geometría

Fecha: 30 de Agosto 2017

Resumen:

- Sean $p, d \in \mathbb{R}^n$ una recta es un subconjunto de R^n tal que:
  $L = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{r} = p + \alpha d \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$ a p le llamamos vector posicion y d el vector director
- Dos vectores $\vec{r_1}, \vec{r_2} \in \mathbb{R}^n$ distintos de 0 se dicen paralelos si es que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{r_1} = \lambda \vec{r_2}$
- Sean $p, d_1, d_2 \in R^n$ un plano Π, es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que:
  $\Pi = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{r} = p + \alpha d_1 + \beta d_2 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ donde nuevamente p es el vector posicion y d_1, d_2 son los vectores directores.
- Dados $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se define el producto punto como $< \vec{x}, \vec{y} >$ como $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- Dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ define la norma euclidiana como $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ y se interpreta como el modulo de x.
- Dos vectores $\vec{r_1}, \vec{r_2} \in \mathbb{R}^n$ se dicen ortogonales si es que $< \vec{r_1}, \vec{r_2} >= 0$

Problemas:

P1. (a) Sea $\Pi : \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{s} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \text{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ un plano. Expreselo en forma cartesiana.

(b) Sean L_1: $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + \text{s} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ y L_2: $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Verifique que son rectas paraleas y encuentre el plano que las contiene.

(c) Sean P=$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, Q=$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y R=$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Verifique que estos puntos son no colineales y obtenga el plano que definen en forma parametrica.

(d) Sea $8x + 9y + z = 5$ un plano. Expreselo en forma parametrica.

P2. (a) Demuestre el teorema de pitagoras usando geometria lineal.

(b) Considere el vector $a = (1, 1, \dots, 1)$ y $b_n = (1, 2, \dots, n)$, ambos en $\mathbb{R}^n$. Sea θ_n el angulo entre a y b_n. Calcule $\lim_{n\to\infty} \theta_n$

(c) Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Muestre que a y b son ortogonales si y solo si $\|a\| \leqslant \|a + \lambda b\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

P3. Sean $\Pi, L \subseteq \mathbb{R}^3$ un plano y una recta respectivamente definidas por:

$$\Pi : x + \alpha y - \beta z = 1 \quad ; \quad L : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}$$

Encuentre α y β tales que:

- L corte a Π en un punto
- L sea perpendicular a Π
- $L \subseteq \Pi$
- L sea paralelo a $\Pi \wedge L \not\subseteq \Pi$

Propuestos:

P4. Sean $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

(i) Determine la ecuación cartesiana del plano π_0, que tiene como directores a d_1 y d_2, y pasa por el origen.

(ii) Dada la recta L definida por: $x + y + z = 4$ y $2x - z = 2$. Determine α y β tales que $P_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \in L$.

(iii) Encuentre el plano π_0', paralelo a π_0 y que pasa por P_0.

(iv) Determine la distancia de π_0' al origen.

P5. En $\mathbb{R}^3$ considere los planos $\pi_1 : x + y + z = 3$ y $\pi_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i) Encuentre la recta L, intersección de π_1 y π_2.

(ii) Encuentre el plano π que pasa por $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y es perpendicular a L.