

DESARROLLO AUXILIAR 2 - SISTEMA DE ECUACIONES.

P11

(a) DE LAS ECUACIONES, PODEMOS ESTABLECER LA SIGUIENTE IGUALDAD:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

LUEGO, EL VECTOR DE LA IZQUIERDA PUEDE DESCOMPONERSE EN LA MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN "VECTOR SOLUCIÓN" CON LAS VARIABLES DEL SISTEMA, ES DECIR:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ES LA MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA}$$

ESTA FORMA DE ESCRIBIR EL SISTEMA SE CONOCE COMO "FORMA MATRICIAL"

AHORA, PARA RESOLVER, DEBEMOS ESCALONAR LA MATRIZ $(A|b)$, TENIENDO EN CUENTA QUE LAS PRIMERAS TRES COLUMNAS DE ESTA MATRIZ SON LOS COEFICIENTES DE x_1, x_2 y x_3

$$(A|b) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & | & \\ 2 & 4 & 1 & | & 6 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 4 & 2 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 1 & | & 6 \\ 4 & 2 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 6 \\ 4 & 2 & 3 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{13}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 6 \\ 0 & -2 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 6 \\ 0 & 0 & -2 & | & 8 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 6 \\ 0 & 0 & -2 & | & 8 \end{pmatrix}} \right\} \text{ TIENE SOLUCIÓN ÚNICA}$$

LUEGO, DE LA ÚLTIMA FILA, $-2x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = -4$

DE LA SEGUNDA FILA $2x_2 - x_3 = 6 \Rightarrow 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1$

Y DE LA PRIMERA FILA $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$

SE CONCLUYE QUE LA SOLUCIÓN AL SISTEMA $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

ES EL VECTOR $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) AHORA QUE SABEMOS LO QUE HAY DETRAS, PODEMOS IR UN POCO MÁS RÁPIDO.

EL SISTEMA SE ESCRIBE EN FORMA MATRICIAL COMO:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A|b) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

AHORA, SOLO QUEDA ESCALONAR $(A|b)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-1)} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{DE LA ÚLTIMA FILA} & 2c + d = 0 \\ \text{DE LA SEGUNDA FILA} & 3b + 2d = 1 \\ \text{DE LA PRIMERA FILA} & a - 2b + c = 1 \end{array}$$

LUEGO, SI DEJAMOS A d COMO VARIABLE LIBRE:

$$c = -\frac{d}{2} ; \quad b = \frac{1-2d}{3} ; \quad a = 1 + 2b - c = 1 + \frac{2-4d}{3} + \frac{d}{2}$$

COMO TENEMOS UNA VARIABLE LIBRE, d PUEDE TENER INFINITOS VALORES, POR LO QUE SE DICE QUE HAY INFINITAS SOLUCIONES

P₂ | ESCRIBIENDO EL SISTEMA EN FORMA MATRICIAL SE OBTIENE:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ -1 & \alpha-4 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & -2 & 1 \\ -1 & \alpha-4 & 2 & \beta \\ 2 & 4 & \beta & \alpha \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow (A|b) \xrightarrow{\substack{E_{12}(1) \\ E_{13}(-2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & -2 & 1 \\ 0 & 2\alpha-4 & 0 & \beta+1 \\ 0 & 4-2\alpha & \beta+4 & \alpha-2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{23}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & -2 & 1 \\ 0 & 2\alpha-4 & 0 & \beta+1 \\ 0 & 0 & \beta+4 & \alpha+\beta-1 \end{array} \right)$$

LUEGO, A PARTIR DE LA MATRIZ ESCALONADA, TRABAJAMOS PARA CADA CASO

(i) PARA QUE HAYAN INFINITAS SOLUCIONES, NO DEBEMOS TENER INFORMACIÓN SOBRE ALGUNA VARIABLE Y ADEMÁS EL SISTEMA DEBE SEGUIR SIENDO COMPATIBLE

ESTO SE VE EN LA MATRIZ COMO LA FALTA DE UN ESCALÓN O UNA FILA COMPLETA DE CEROS.

LO ANTERIOR SE TIENE PARA:

$$(\beta = -4 \wedge \alpha = 5) \vee (\alpha = 2 \wedge \beta = -1)$$

(ii) NO EXISTE SOLUCIÓN CUANDO EL SISTEMA ES INCOMPATIBLE, ES DECIR CUANDO ESTAMOS FRENTE A UNA IGUALDAD DEL ESTILO $0=2$

ESTO SE TIENE PARA $(\beta = -4 \wedge \alpha \neq 5) \wedge (\alpha = 2 \wedge \beta \neq -1)$

(iii) LA SOLUCIÓN ES ÚNICA CUANDO LA DIAGONAL DE LA MATRIZ ESCALONADA ES TODA DISTINTA DE 0, LO CUAL SE TIENE PARA $(\beta \neq -4 \wedge \alpha \neq 2)$

P₃

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

ESTABLECEMOS LA MATRIZ EXTENDIDA $(A|0)$ QUE REPRESENTA AL SISTEMA $AX=0$ Y LA ESCALONAMOS

$$A \xrightarrow{\begin{matrix} E_{12}(-a) \\ E_{13}(-a^2) \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & 0 \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{23}(-(b+a))} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & 0 \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(b+a)(c-a) & 0 \end{array} \right)$$

COMO $c^2 - a^2 - (b+a)(c-a) = (c-a)(c+a-b-a) = (c-a)(c-b)$

TENEMOS $(\tilde{A}|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & 0 \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & 0 \end{array} \right)$

LUEGO, SI HAY SOLUCIÓN ÚNICA, LA DIAGONAL DE LA MATRIZ ESCALONADA DEBE SER TODA DISTINTA DE 0
 $\Rightarrow b \neq a, c \neq a \wedge c \neq b$, LO CUAL CONCLUYE LO PEDIDO

(b) EL SISTEMA SE ESCRIBE COMO:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} E_{13}(\alpha) \\ E_{14}(\beta) \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha^2 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha(1+\beta) & \beta^2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} E_{23}(-\beta) \\ E_{24}(-\beta) \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha\beta & \alpha\beta - \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$I_{34} \xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha-\beta) & \beta(\alpha-\beta) & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{34}(\beta-\alpha)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(\alpha-\beta) & 0 \end{array} \right)$$

PARA QUE TENGA SOLUCIÓN ÚNICA SE REQUIERE QUE LA DIAGONAL SEA TODA DISTINTA DE 0 $\Rightarrow \alpha \neq \beta, \alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0$