Auxiliar 2: Sistemas de Ecuaciones

Fecha: 16 de Agosto 2017

Resumen:

- Dada una matriz elemental de permutacion $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}(K)$, $A \in \mathcal{M}_{ns}(K)$ y $B \in \mathcal{M}_{ln}(K)$, se tiene que:
  1. $I_{pq}A$ corresponde a la matriz A con las filas p y q permutadas
  2. BI_{pq} corresponde a la matriz B con las columnas p y q permutadas
- La matriz elemental $E_{pq}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}(R)$ construida a partir de la identidad, agregando el valor λ en la posicion (q,p), es tal que al multiplicar por la izquierda dicha matriz con una matriz $A \in \mathcal{M}_{nl}(R)$ cualquiera, el resultado sera la misma matriz A pero en la fila q, se suma la fila p multiplicada por λ.

Problemas:

P1. (a) (Para soltar la mano) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} a - 2b + c + &= 1 \\ 2a - b + 2c + 2d &= 3 \\ a + b + 3c + 3d &= 2 \end{aligned}$$

P2. (Estándar) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + \alpha x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + (\alpha - 4)x_2 + 2x_3 &= \beta \\ 2x_1 + 4x_2 + \beta x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

Determine los valores de los parámetros α y β para que el sistema tenga:

(i) Infinitas soluciones.

(ii) Ninguna solución.

(iii) Solución única.

P3. (P1 C1 2011-2)

(a) Sea A la matriz de coeficientes reales definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Demuestre que si la ecuacion $Ax = 0$ tiene solución única, entonces $(a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c)$

(b) Considere el siguiente sistema lineal a coeficientes reales:

$$\begin{aligned} -x_1 \qquad\quad + \alpha x_3 + \beta x_4 &= 0 \\ x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 &= 0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 \qquad\qquad\quad &= 0 \\ \beta x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Determine las condiciones sobre α y β que aseguren que el sistema tenga solucion unica

---

Propuestos:

P4. (a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(R)$, pruebe que:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in R^n)(\forall y \in R^n), x^t A y = x^t B y$$

(b) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(R)$ simetricas, pruebe que:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in R^n), x^t A x = x^t B x$$

P5. Considere $A = \begin{pmatrix} -\alpha & 2 & 0 & 1 \\ \alpha & -3 & 2 & -1 \\ \alpha & -2 & -1 & 1 \\ 2\alpha & -2 & -4 & \beta \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ \alpha + \beta + 2 \end{pmatrix}$

Determine los valores de $\alpha,\ \beta \in R$ para los cuales el sistema $Ax = b$, con $x \in R^4$

(a) Tiene solución única.

(b) Tiene infinitas soluciones.

(c) No tiene solución.