DESARROLLO AUXILIAR 1 - MATRICES

P1

(a) Pdq $\exists A^{-1} \in M_{nn}(\mathbb{R})$ tq $A \cdot A^{-1} = I$

En efecto, como $A^K = I$, por definición de las potencias de una matriz, $A^K = A^{(K-1)} \cdot A$

$\Rightarrow A^{(K-1)} \cdot A = I \Rightarrow A^{(K-1)}$ es matriz inversa de A

Se concluye que A es invertible

(b) Sea $B \in M_{22}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera que escribimos como:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$$

Ahora, imponemos sobre B que $B \neq 0$ y $B^2 = 0$ y como solamente debemos encontrar una matriz, podemos armarla "al ojo". Por ejemplo, tomando $a=0$, $b=0$, $c=1$ y $d=0$, se tendría:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \wedge \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Lo cual satisface lo pedido.

P2 Basta con verificar que $(I_n + AB)(I_n + AB)^{-1} = I_n$

En efecto, utilizando el inverso propuesto se tiene

$$\begin{aligned}
(I_n + AB)(I_n + AB)^{-1} &= (I_n + AB)(I_n - A(I_n + BA)^{-1}B) \\
&= I_n + AB - (I_n + AB)(A(I_n + BA)^{-1}B) \\
&= I_n + AB - (A + ABA)(I_n + BA)^{-1}B \\
&= I_n + AB - A\underbrace{(I_n + BA)(I_n + BA)^{-1}}_{I_n \text{ por definicion}}B \\
&= I_n + AB - AB \\
&= I_n
\end{aligned}$$

Se concluye que $I_n + AB$ es invertible

P3 (a) PRIMERO, DEBEMOS DEFINIR CLARAMENTE QUE ES UNA MATRIZ DEFINIDA POR BLOQUES.

PARA ELLO, DEFINIMOS QUE ELEMENTO SE ENCUENTRA EN LA FILA i Y LA COLUMNA j DE LAS MATRICES X E Y

$$X_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \le n,\ j \le n \\ b_{i(j-n)} & \text{si } i \le n,\ j > n \\ c_{(i-n)j} & \text{si } i > n,\ j \le n \\ d_{(i-n)(j-n)} & \text{si } i > n,\ j > n \end{cases} \quad ; \quad Y_{ij} = \begin{cases} e_{ij} & \text{si } i \le n,\ j \le n \\ f_{i(j-n)} & \text{si } i \le n,\ j > n \\ G_{(i-n)j} & \text{si } i > n,\ j \le n \\ h_{(i-n)(j-n)} & \text{si } i > n,\ j > n \end{cases}$$

AHORA, POR DEFINICIÓN DE MULTIPLICACIÓN DE MATRICES:

$$(XY)_{ij} = \sum_{k=1}^{n+m} X_{ik} Y_{kj}$$

SIGUE UTILIZAR LAS DEFINICIONES DE X_{ik} E Y_{kj} PARA CALCULAR LAS SUMATORIAS

$$\Rightarrow (XY)_{ij} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} X_{ik} Y_{kj}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+m} X_{ik} Y_{kj}}_{S_2}$$

S_1 Y S_2 DEPENDERAN DE i Y j DE LA SIGUIENTE MANERA

$$(S_1)_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kj} = (AE)_{ij} & i \le n,\ j \le n \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} f_{k(j-n)} = (AF)_{i(j-n)} & i \le n,\ j > n \\ \sum_{k=1}^{n} c_{(i-n)k} e_{kj} = (CE)_{(i-n)j} & i > n,\ j \le n \\ \sum_{k=1}^{n} c_{(i-n)k} f_{k(j-n)} = (CF)_{(i-n)(j-n)} & i > n,\ j > n \end{cases}$$

$$(S_2)_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=n+1}^{n+m} b_{i(k-n)} G_{(k-n)j} = \sum_{k'=1}^{m} b_{ik'} G_{k'j} = (BG)_{ij} & \text{si } i \le n,\ j \le n \\ \sum_{k=n+1}^{n+m} b_{i(k-n)} h_{(k-n)(j-n)} = \sum_{k'=n}^{m} b_{ik'} h_{k'(j-n)} = (BH)_{i(j-n)} & \text{si } i \le n,\ j > n \\ \sum_{k=n+1}^{n+m} d_{(i-n)(k-n)} G_{(k-n)j} = \sum_{k'=n}^{m} d_{(i-n)k'} G_{k'j} = (DG)_{(i-n)j} & \text{si } i > n,\ j \le n \\ \sum^{n+m} d_{(i-n)(k-n)} h_{(k-n)(j-n)} = \sum^{m} d_{(i-n)k'} h_{k'(j-n)} = (DH)_{(i-n)(j-n)} & \text{si } i > n,\ j > n \end{cases}$$

Con esto tendríamos bien definido las componentes de XY, resultando:

$$(XY)_{ij} = S_1 + S_2 = \begin{cases} (AE)_{ij} + (BG)_{ij} & i \le n,\ j \le n \\ (AF)_{i(j-n)} + (BH)_{i(j-n)} & i \le n,\ j > n \\ (CE)_{(i-n)j} + (DG)_{(i-n)j} & i > n,\ j \le n \\ (CF)_{(i-n)(j-n)} + (DH)_{(i-n)(j-n)} & i < n,\ j < n \end{cases}$$

Lo cual define a XY como la matriz por bloques

$$XY = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$ lo cual concluye la demostración

(b) En efecto, usando el resultado anterior, si $B = 0$

$$XY = \begin{pmatrix} AE + 0 & AF + 0 \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Ahora, para encontrar la inversa de X imponemos $XY = I_{n+m}$

Pero como $I_{n+m} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right)$ es lo mismo imponer que:

(1) $AE = I_n$; (2) $AF = 0$; (3) $CE + DG = 0$; (4) $CF + DH = I_m$

de (2) como A es invertible $AF = 0 \Rightarrow A^{-1} AF = A^{-1} = 0$
$\Rightarrow F = 0$

de (1) $AE = I_n \Rightarrow E = A^{-1}$

de (4), como $F = 0$ $DH = I_m \Rightarrow H = D^{-1}$

y por último de (3), como $E = A^{-1}$, $CA^{-1} + DG = 0$
$\Rightarrow DG = -CA^{-1}$
$\Rightarrow D^{-1}DG = G = -D^{-1}CA^{-1}$

lo cual nos dice que $Y = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$ satisface

$XY = I_{n+m} \Rightarrow X$ es invertible con $X^{-1} = Y$

P4

(a) $A^2 - 2A + \alpha I = 0 \Rightarrow \dfrac{A^2 - 2\cdot A}{-\alpha} = I \Rightarrow A\left(\dfrac{A-2I}{-\alpha}\right) = I$

lo cual nos indica que existe una matriz inversa de A

Con esto concluimos A invertible con $A^{-1} = \dfrac{(A+2I)}{-\alpha}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ } La multiplicación se deja como ejercicio

$$\Rightarrow A^2 - 2A - 3I = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$