# Auxiliar 1: Matrices

Fecha: 9 de Agosto 2017

**Resumen:**

- Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$ (n filas y m columnas), esta se escribe como:
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ Donde cada termino $a_{ij} \in \mathbb{K}$
- Diremos que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ son iguales si es que $\forall i = 1, \ldots, m$ , $\forall j = 1, \ldots, n$ se tiene que $a_{ij} = b_{ij}$
- El producto de matrices $A \in \mathcal{M}_{nl}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{lm}(\mathbb{K})$ se define como $AB \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$, con $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$
- Se definen las potencias de una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ como: $A^0 = I$ , $A^n = A^{n-1}A$ , $n \geq 1$
- Se define la matriz traspuesta de $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ como $[A^t]_{ij} = A_{ji}$
- Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es invertible si $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $AA^{-1} = I$
- Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es simetrica si es que $A = A^t$
- Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es nilpotente si es que $A^k = 0$ para algun $k$

**Problemas:**

**P1** (a) Muestre que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ verifica que $A^k = I$, para algun $k \in \mathbb{Z}$ con $k \neq 0$, entonces A es invertible y determine su inversa

(b) Encuentre una matriz $B \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ que cumple que $B \neq 0 \wedge B^2 = 0$

**P2** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tales que $(I_n + BA)$ es invertible, muestre que $I_n + AB$ es invertible con:

$$(I_n + AB)^{-1} = I_n - A(I_n + BA)^{-1}B$$

**P3** (a) Considere las matrices $A, E \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $B, F \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ , $C, G \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ y $D, H \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ y considere las matrices $X, Y \in \mathcal{M}_{n+m,n+m}(\mathbb{R})$ definidas por bloques como: $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$
Demuestre que $XY = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$

(b) Ahora, si es que A,D son matrices invertibles y B=0, demuestre que la matriz X es invertible y encuentre su inversa en funcion de $C$, $A^{-1}$ y $D^{-1}$.

**P4** (Si me da el cuero) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A + \alpha I = 0$, para algun $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Demuestre que A es invertible

(b) Compruebe que la siguiente matriz satisface la condicion del problema para $\alpha = -3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$