MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 8: TFC

13 de octubre de 2017

P1. Se define $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n(x)dx$$

Demostrar que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$, $\forall n \geq 2$

P2. Sean u, v: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y f una función continua y sea $G(x) = \displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$.

a) Muestre que $G'(x) = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$

b) Demuestre que $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$, no depende de x y calcule su valor $\forall x > 0$

P3. *a*) Calcule el valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} sin(t^2)dt}{1-e^{x^6}}$$

b) Sea $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{sen(t)}{t}dt$, donde $\frac{sen(t)}{t}$ se define en 0 por continuidad. Demostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(t)}{t}dt - 1$$

P4. *a*) Demuestre que $\left|\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}sen(x)}{1+x^2}dx\right| \leq \frac{\pi}{12e}$

b) *[Propuesto]* Sea f una función impar, integrable en $[-a, a]$. Pruebe que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

P5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Se define $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} (x-t)f(t)dt$. Demuestre que $G''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Indicación: puede ser util usar TVM para derivadas

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable la función $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua.
- **TFC 1:** Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces $\forall x \in int(I)$:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$$

- **Corolario del TFC 1:** Si la función F, continua en I es una primitiva cualquiera de f en I, entonces:

$$\forall a.b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

- **TFC 2:** Sea f integrable en (a,b) si existe una función tal que: $F' = f$ en (a,b), entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **Integración por Partes:** Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y con derivadas continuas en (a,b), entonces:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

- **Integración por sustitución:** Sea g continua en $[a,b]$ y con derivada continua en (a,b). Sea f continua en $g([a,b])$, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

- **Valor Medio:** Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Se llama valor medio de f en $[a,b]$ a

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

  Se anota como $\overline{f}$ o $\langle f \rangle$.

- **TVM-integrales:** Si f es continua en $[a,b]$, entonces $\exists \xi(a,b)$ tal que $f(\xi) = \langle f \rangle$, es decir:

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

- **TVM Generalizado - integrales:** Si f es continua en $[a,b]$ y g es integrable en $[a,b]$, que no cambia de signo, entonces $\exists \xi(a,b)$ tal que

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$$