MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 7: Riemann

6 de octubre de 2017

P1. *a*) Considerando la partición $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ demuestre que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\right)$$

b) Calcule $\int_a^b e^x dx$ usando una partición equiespaciada.

P2. Sea f definida y acotada en $[a, b]$, Riemann-Integrable tal que $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$. Pruebe que f^2 es tambien Riemann-Integrable en $[a, b]$.

P3. Considere una función $f : [a, b] \to [c, d]$ continua, biyectiva y estrictamente creciente.

a) Muestre f es integrable y que f^{-1} es integrable y estrictamente creciente.

b) Considere la partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y su correspondiente partición imagen $Q = \{f(x_0), \ldots, f(x_n)\}$ del intervalo $[c, d]$. Demuestre que

$$S(f, P) + s(f^{-1}, Q) = bd - ac$$

c) Concluya que $\displaystyle\int_c^d f^{-1} = bd - ac - \int_a^b f$

P4. **[Limites y Series]**

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^3}\right)$

b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{i}{n}\right)}$ y luego calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

P5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa en $[a, b]$. Pruebe que si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ entonces $f(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$

- Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. El conjunto $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una *partición del intervalo* $[a,b]$ si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Diremos que la norma de la partición P es:

$$|P| = \sup_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y denotamos al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$ como $\mathcal{P}_{[a,b]}$.

Importante: notar que $(x_i - x_{i-1}) \leq |P|$

- Sea $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definimos su suma superior e inferior como:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

donde $M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

- Si $P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $P \subseteq Q$ tenemos que:

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definimos su integral superior e inferior como:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} S(f,P)$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} s(f,P)$$

- Diremos que una función es Riemann-Integrable (o simplemente integrable) si su integral superior e inferior coinciden. En dicho caso definimos la integral como:

$$\int_a^b f(x) = \overline{\int_a^b} f(x) = \underline{\int_a^b} f(x)$$

- **Criterio de Riemann:** f es integrable si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}, S(f,P) - s(f,P) \leq \varepsilon$$

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada y monótona, entonces es integrable en $[a,b]$.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable en $[a,b]$.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua o acotada y monótona, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P| \to 0} s(f,P) = \lim_{|P| \to 0} S(f,P)$$
$$= \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

Donde $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

- Dos particiones comunes son la equiespaciada:

$$x_i = x_0 + i\Delta x = a + i\frac{b-a}{n}$$

y la geométrica: $x_i = aq^i = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^i$.

- Propiedades de la integral
  - $\int_a^b c = c(b-a)$
  - $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ si $f(x) \leq g(x)$ en todo $[a,b]$
  - $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

- **Segundo TFC:** Si f es integrable en $[a,b]$ y existe una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b). Entonces: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.