

MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Marcelo Navarro



Auxiliar 13: Integrales Impropias

13 de noviembre de 2017

Recuerdo:

- **Primera Especie:** Sea $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a, \infty)$ si se cumple:

1. $\forall x \in (a, \infty)$, f es integrable en $[a, x]$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f$ existe.

En caso de que lo anterior exista denotaremos

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f.$$

- Si el límite anterior existe diremos que la integral impropia es convergente y si no diremos que es divergente.
- De manera análoga se define $\int_{-\infty}^b$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^{\infty} f$$

Donde para que la integral de la izquierda converja deben converger las de la izquierda.

- Dado $a > 0$. Luego $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ converge si y sólo si $s > 1$.
- **Segunda Especie:** Sea $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ no acotada, diremos que f es integrable en $[a, b)$ si se cumple:

1. $\forall x \in (a, b)$, f es integrable en $[a, x]$.
2. $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$ existe.

En caso de que lo anterior exista denotaremos

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f.$$

- Dado $a < b$. Luego $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^s}$ converge si y sólo si $s < 1$.

- **Mixtas:** Estas integrales convergen si cada una de las integrales en las que se separan (de primera o segunda especie converge)

■ Criterio de Convergencia 1:

Sean g, f continuas tal que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ a partir de $x_0 \geq a$. Luego si $\int_a^{\infty} g$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f$ converge, de manera recíproca si $\int_a^{\infty} f$ diverge $\int_a^{\infty} g$ también.

■ Criterio de Convergencia 2:

Sean f, g continuas tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

Luego si $\int_a^{\infty} g$ y $\int_a^{\infty} f$ convergen o divergen juntas.

Obs: Los criterios de convergencia anteriores sirven también para integrales de segunda especie, reemplazando ∞ por b^- .

- Diremos que $\int_a^{\infty} f$ es absolutamente convergente si $\int_a^{\infty} |f|$ converge.
- Si $\int_a^{\infty} |f|$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f$ converge.

P1. Calcule, si es que existe, el área de bajo la curva

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

En el primer cuadrante.

P2. Determine si las siguientes integrales son o no convergentes.

a) $\int_0^1 \ln(x) dx$

d) $\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$

b) $\int_1^\infty \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^x dx$

e) $\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx$

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x(x + \sqrt{x})}$

f) $\int_0^1 \frac{\sin(2x)}{x^{3/2}} dx$

P3. Estudie la convergencia de la siguiente integral y calcule su valor (si es que existe):

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin(x) dx$$

P4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente y derivable en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

a) Pruebe que $\int_0^\infty |f'(x)| dx$ converge.

b) Pruebe que $\int_0^\infty f(x) \sin(3x) dx$ converge

P5. [Propuesto: Cuerno de Gabriel] Considere la función $f(x) = \frac{1}{x}$, con $x \in [1, \infty)$. Demuestre que el volumen del solido de revolución en torno al eje OX es finito, mientras que su manto es infinito.