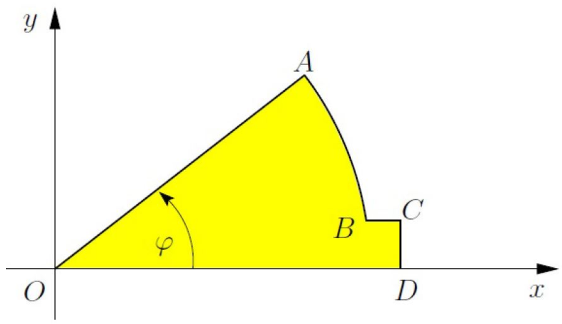
MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Auxiliares: Vicente Salinas &
Marcelo Navarro

Guia Control 3

A darlo vuelta

P1. Un trompo se genera por la rotación en torno al eje OX de la curva $OABCD$ mostrada en la figura



OA: es un trazo recto inclinado en un ángulo φ,

AB: es un arco de circunferencia de radio R y centro en O,

BC: es un trazo horizontal,

CD: es un trazo vertical *de largo 1*, ubicado en $x = R+1$.

a) Escriba, en términos de R y φ, las ecuaciones de las funciones que definen los tramos OA, AB y BC de la curva y encuentre las coordenadas de los puntos A,B y C.

b) Encuentre el área total de la superficie exterior del trompo.

P2. Probar que el área encerrada por los 2n lazos de $r = a\sin(n\theta)$, con n par es independiente de n. ¿Que sucede para el caso de n impar?

P3. Calcular el área de la región fuera del cardioide $\rho = 2(1-\cos(\phi))$ y dentro del círculo $\rho = -6\cos(\phi)$.

P4. Sea $a > 0$ considere la región limitada por los ejes y el arco de circunferencia de centro (a,a) y radio a.

a) Calcule el área de la región.

b) Calcule el centro de gravedad de la región

Indicación: Puede serle útil recordar :$X_G = \dfrac{\displaystyle\int_a^b xf(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx} \wedge Y_G = \dfrac{\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)^2}{2}dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$

P5. Sea $n \geq 1$ encuentre el centroide de la región entre $f(x) = x^n$ y la recta $x = 1$. Muestre que sucede si $n \to \infty$

P6. Considere las funciones $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas para $x \in [0,\pi]$. Se define la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\pi],\ y \in [f(x), g(x)]\}$

a) Demuestre que $\forall x \in [0,\pi]$, $g(x) \geq f(x)$.

b) Calcule el área de la región R.

c) Encuentre la posición del centro de gravedad de la región R

d) Determine el perimetro de la región R.

P7. Sea $P, Q \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización arbitraria de una curva Γ con $\vec{r}(a) = P$ y $\vec{r}(b) = Q$. Probar que $L(\Gamma) \geq \|v\|$, donde $v = Q - P$, es decir el segmento entre P y Q entrega el menor camino posible. Para esto siga los siguientes pasos:

a) Considere la integral $\displaystyle\int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt$ y calcule su valor.

b) Concluya utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz $u \cdot v \leq \|u\|\|v\|$

P8. Escribir la ecuación paramétrica del lugar geométrico constituido por todos los puntos cuyo producto de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (tal que $dist(F_1, F_2) = 2a$) es una magnitud constante igual a a^2, con $a > 0$. Utilice coordenadas polares.

P9. [P2 a) Examen Recuperativo 2010-2]

Considere la curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \left(\int_0^t cos\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du, \int_0^t sen\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du \right) \qquad t \in [0, \infty)$$

Donde c es una constante positiva. Encuentre

a) $\hat{T}(t), \hat{N}(t), \hat{B}(t)$ y su $\kappa(t)$

b) De un argumento geométrico de porque la torsión es 0 y corrobore esto mediante el calculo según su respectiva formula.

P10. Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ y } (z - x)(z + x) = y^2$$

a) Encuentre una parametrización de Γ. ($a > 0$)

b) Calcule el centro de masa dada por $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

P11. Encontrar todas las funciones $f(t)$ tales que la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (e^t, f(t), \lambda f(t))$, con $t \in \mathbb{R}$ y λ una constante real, sea una recta.

P12. Sea una curva Γ que cumple con que existe un punto P_0 por el cual pasan todas las rectas normales de Γ. Se define $P_0 = \vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)$, donde $\vec{\sigma}(s)$ es la parametrización en longitud de arco de Γ, $(\hat{N})(s)$ es el vector normal a Γ y ϕ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ con $\phi : [0, l_0] \to \mathbb{R}$. Demuestre que $\kappa(s) = 1$, $\tau(s)\phi(s) = 0$ y $\phi'(s) = 0$, donde $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son la curvatura y la torsión respectivamente. Concluya que Γ es una curva plana.

Indicación: Quizás le sea util ocupar que $\hat{T}, \hat{N}$ y $\hat{B}$ son linealmente independientes.

Definición: (Independencia Lineal) *Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq R^n$ diremos que estos vectores son linealmente independientes si $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n$*

P13. Se tiene una curva regular Γ en $\mathbb{R}^3$, parametrizada en longitud de arco por $\vec{r}(s)$, con curvatura $k(s)$ y torsión $\tau(s)$. Determinar la curvatura de $\dfrac{d\vec{r}(s)}{ds}$.

P14. Considere la curva Γ descrita por $\vec{r}(t) = f(t)(cos(t), sen(t))$ con $t \in [0, \infty)$. Donde f es de clase $\mathcal{C}^1$ y $0 \leq f(t) \leq 1, \forall t \geq 0$.

a) Muestre que si $L(\Gamma)$ es finito y f decreciente, entonces $f(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$

b) Muestre que si $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$, entonces $L(\Gamma)$ es infinito.

c) Si $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2}$. ¿Es finito $L(\Gamma)$?

d) Caracterize (en terminos de existencia de integrales impropias) las funciones f tales que $L(\Gamma)$ es finito.

e) Use el resultado de la parte *d*) para mostrar que el resultado de la parte *a*) se mantiene aun sin la hipótesis de que f sea decreciente.

P15. Para las siguientes integrales impropias, identifique su tipo y si diverge o converge.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sen^2(x)}{1+x^2}dx$

b) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x+e^x}dx$

c) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x-e^{-x}}dx$

d) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$

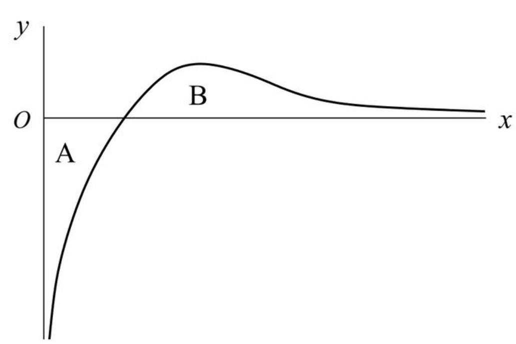
e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tan(x)dx$

f) $\displaystyle\int_{1^-}^\infty \frac{4dx}{x^2\sqrt[4]{x^2-1}}$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x}dx, \alpha > 0$

h) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{xln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx$

P16. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{ln(x)}{1+x^2}$ (ver figura). Porbar que las áreas de A y B son finitas e iguales. Indicación: para probar la igualdad, use el cambio de variables $y = 1/x$.



P17. Pruebe la siguiente condición necesaria de convergencia de integrales impropias de primera especie:

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ converge } \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

P18. Determine la convergencia de $\displaystyle\int_{0^+}^\infty \frac{1}{ln^p(x)}dx$ según el valor de $p \in \mathbb{R}$

P19. Considere $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ existe.

Demuestre o refute que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ ¿Podria generalizar su resultado para $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$?

P20. Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

a) Calcule, si existe, el área de la región bajo la curva en el primer cuadrante.

b) Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OX de la región anterior, existe (no lo calcule).

P21. Para $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua se define la integral:

$$L(f) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x) dx$$

a) Demostrar que si existen M y b reales tales que $\forall x \in [0, \infty)$, $|f(x)| \leq Me^{bx}$, entonces la integral $L(f)$ converge para todo $\alpha > b$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y tal que existen los reales de la parte anterior que acotan a $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$. Demostrar que para $\alpha > b$

$$L(f') = \alpha L(f) - f(0)$$

y con esto concluya que:

$$L(f'') = \alpha^2 L(f) - \alpha f(0) - f'(0)$$

c) Pruebe que para $\lambda \in \mathbb{R}$, $L(\lambda f) = \lambda L(f)$ y concluya que:

$$L(sen(\omega x)) = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

P22. Considere la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$

a) Demuestre que la integral es absolutamente convergente.

b) Concluya que la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$ también lo es.

P23. Calcular las siguientes integrals:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{x-e^x} dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4}$

P24. Sea f una función de clase C^2 en $[0, 1]$, verificando que $f(0) = 0$. Demuestre que la integral:

$$\int_0^1 f(x) x^{-\frac{3}{2}} dx$$

Converge