

Guia

P1 En todas, estudiar $|f(x) - f(\bar{x})|$

$$\begin{aligned} a) \quad |x \sin(\frac{1}{x}) - 0| &= |x \sin(\frac{1}{x})| \\ &\leq |x| \quad \text{Seno acotado} \\ &= |x - 0| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{Si } |x - 0| \leq \delta \Rightarrow \delta = \varepsilon$$

$$b) \quad |x^3 - \bar{x}^3| = |x - \bar{x}| |x^2 + x\bar{x} + \bar{x}^2|$$

$$\begin{aligned} \text{desigualdad} \rightarrow &\leq |x - \bar{x}| (|x^2| + |x\bar{x}| + |\bar{x}^2|) \\ \text{Triangular} &= |x - \bar{x}| (x^2 + |\bar{x}||x| + |\bar{x}|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } |x - \bar{x}| &\leq \underset{\delta}{1} \Rightarrow |x| = |x - \bar{x} + \bar{x}| \\ &\leq |x - \bar{x}| + |\bar{x}| \quad \rightarrow \text{Triangular} \\ &\leq 1 + |\bar{x}| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |x| \leq 1 + |\bar{x}|$$

$$\begin{aligned} \text{MATRACA} \left(\begin{aligned} &\Rightarrow |x|^2 \leq (1 + |\bar{x}|)^2 \\ &\leq |x - \bar{x}| (3|\bar{x}^2| + 3|\bar{x}| + 1) \end{aligned} \right. \rightarrow \text{cte} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{(3\bar{x}^2 + 3|\bar{x}| + 1)} \right\}$$

$$c) \quad |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \cdot \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|}$$

$$= \frac{|x-a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \leq \frac{|x-a|}{|\sqrt{x-a}|} = \sqrt{x-a}$$

SP8

$$\delta = \varepsilon^2$$

$$\sqrt{x-a} \leq \sqrt{x} + \sqrt{a}$$

$\Leftrightarrow$

$$2\sqrt{xy} \geq -2y \Leftrightarrow \forall \text{ puer } \text{Dom}(f) = \mathbb{R}_+$$

$$d) \quad |x^2 + 5 - (9 + 5)| = |x^2 - 9| \\ = |x+3| |x-3|$$

$$|x-3| \leq 1 \Rightarrow |x+3| \leq 7$$

$$\delta \leq 7 |x-3|$$

$$\leq 7 \frac{\varepsilon}{7}$$

$$\Rightarrow \delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\}$$

P2 probar que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ con $x_0 \in \mathbb{Z}$

- P3**
- a) Calcular Lmites
 - b) $x+a=0$ ver que ocurre
 - c) TVI

P4 Por Contradicción: $\exists x, y, z$ tq $x < y < z$
pero $f(x) < f(y)$ y $f(y) > f(z)$
Estudiar $f(x) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} f(z)$ llegar a contradicción
en $z, z = y < (3 \text{ casos})$

- PS**
- a) Calcular Lmite
 - b) derivar por definición

P6 TVI $\rightarrow$ para la existencia
Unicidad $\xrightarrow{(1)}$ crecimiento
 $\downarrow$
(2) Contradicción, suponer que hay
otra raíz, aplicar TVI $\Rightarrow$ (solución
en los imaginarios)

P7 TVI

P8 TVI en pto's interiores

P9 TVI

P10 TVI + Crecimiento
 $\downarrow$ existencia $\downarrow$ unicidad

P11 TUM, Sea $x, y \in \mathbb{R}$ $x < y$

f es continua en $[x, y]$ y derivable en (x, y)

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| \quad \text{con } c \in (x, y)$$
$$\leq |K| \quad \text{Ser acotada}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |K| |x - y|$$

Lipschitz

$\Rightarrow$ Uniforme
continua

P12 en $D = (0, \infty)$ tomar $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n+1} \in (0, \infty)$

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| \rightarrow 0 \quad \text{pues ambas tienden a } 0$$

$$\text{Pero } \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = |n - n - 1|$$
$$= |-1| = 1 \neq 0$$

en $D = (a, \infty)$ probar que f' es acotada
y usar la pregunta anterior

P13 reparar f en a y b y usar TEO
 f continua en $[a, b]$ (cerrado y acotado)
 $\Rightarrow f$ uniforme continua

P14 a) usar TVI sobre $[x_1, x_2]$ con x_1, x_2 pto's fijos

b) i) Tomar $|f(x) - f(x_0)| < K(x - x_0) / \frac{1}{|x - x_0|}$

y tomar Limite

ii) • TVI con $\varphi(x) = f(x) - x$ en $[a, b]$
Existencia

• Unicidad: suponer 2 pto's fijos por (a)

$f'(\xi) = 1$ pero por b.1) $f'(\eta) < 1$
 $\Rightarrow \Leftarrow$

P15 a) recordar $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 1 & \text{si } |x| = 1 \\ \pm\infty & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

b) las funciones constantes son derivables
estudiar -1 y 1 por separado

P16 a) Limite en $x \rightarrow 0$

b) Continua en cerrado y acotado $\Rightarrow$ unif continua

P17 user TVN $f(x) = \sin(x)$ sobre $[x, y]$

idem con $g(x) = \cos(x)$

P18 user TVN sobre $[1, \frac{a}{b}]$ y acotar

P19 TVN en $[0, x)$ de e^x y $(1+x^n)$

P20 TVN generalizado sobre $[0, x)$ con $x \in (0, 1)$

Tomando $f(x) = \arctan(x)$, $g(x) = \arccos(x)$

P21 a) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (tiene que ser lo)

user L'Hopital

b) verificar que $g'(1, -2) = 0$ y que

$$g''(1, -2) > 0$$

c) Derivar

P22 Derivar, igualar a 0

$$x_{\min} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Verificar con 2-derivada

Final: evaluar x^* en $f(x)$ y como es suma de cuadrados debe ser mayor o igual que 0

~ **P23** usar TUN en $[t_{i-1}, t_i]$

$$\Rightarrow f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \leq K(t_i - t_{i-1}) \quad \left. \begin{array}{l} f' \\ \text{acotada} \end{array} \right\}$$

Ahora $\sum_{i=1}^n$ a ambos lados y usar telescópica

P24 ver Hint

P25 $\rightarrow$ **P34**
Lo típico

P35 Taylor
Sobre $\sqrt{x}$ en torno
a 2 o 4

P36 derivar $f(x)$
y reemplazar