

Aux #4

P1 pda $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$

En efecto, Sean $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios t.q. $x < y$.

Como $f(x) = \cos(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$

Luego es continua en $[x, y]$ y derivable en (x, y) , es decir cumple con hipotesis de TVM.

$\xRightarrow{\text{TVM}} \exists \xi \in [x, y]$ tal que

$$\frac{\cos(x) - \cos(y)}{x - y} = \cos'(\xi) = -\sin(\xi)$$

$$\Rightarrow \cos(x) - \cos(y) = -\sin(\xi)(x - y)$$

Luego, tomando modulo se tiene que

$$\begin{aligned} |\cos(x) - \cos(y)| &= |-\sin(\xi)| |x - y| \\ &\leq 1 |x - y| \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} |\sin(\xi)| \leq 1$$

$$\therefore |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$$

P2 pdg: $1 + \ln(x) < (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) < 1 + \ln(x+1) \quad \forall x > 0$

Notemos que el termino del centro es lo más cercano a la forma del TUM, Consideremos $f(x) = x\ln(x)$.

$x\ln(x)$ es continua y derivable en todo su dominio por algebra y composición de funciones derivables

$\text{Dom}(f) = (0, \infty)$ pues $\ln(x)$ existe si $x > 0$.

Dicho esto Consideremos $\bar{x} > 0$ arbitrario y el intervalo $[\bar{x}, \bar{x}+1]$, Como $f(x) = x\ln(x)$ es continua y derivable en $(0, \infty) \Rightarrow$ debe ser continua en $[\bar{x}, \bar{x}+1]$ y derivable en $(\bar{x}, \bar{x}+1)$ con derivada $f'(x) = 1 + \ln(x)$

$\Rightarrow$ por TUM $\exists c \in (\bar{x}, \bar{x}+1) \quad \dagger_g$

$$\frac{\bar{x}\ln(\bar{x}) - (\bar{x}+1)\ln(\bar{x}+1)}{\bar{x} - (\bar{x}+1)} = 1 + \ln(c)$$

$$\Leftrightarrow (\bar{x}+1)\ln(\bar{x}+1) - \bar{x}\ln(\bar{x}) = 1 + \ln(c) \quad (\star)$$

En virtud de que $\ln(x)$ es estrictamente creciente

$\Rightarrow$ Como $\bar{x} < c < \bar{x}+1 \Rightarrow \ln(\bar{x}) < \ln(c) < \ln(\bar{x}+1)$
Crecimiento

Sumando "+1" a la última desigualdad

Obtenemos que

$$\ln(\bar{x}) + 1 < \ln(c) + 1 < \ln(\bar{x} + 1) + 1$$



$$\Leftrightarrow \ln(\bar{x}) + 1 < (\bar{x} + 1) \ln(\bar{x} + 1) - \bar{x} \ln(\bar{x}) < \ln(\bar{x} + 1) + 1$$

Como este resultado se obtuvo para $\bar{x}$ so arbitrario, se concluye entonces que

$$\forall x > 0 \quad \ln(x) + 1 < (x+1) \ln(x+1) - x \ln(x) < \ln(x+1) + 1$$


b) pda $\forall n \geq 1$ Sumatoria

$$n \ln(n) - (n-1) \leq \ln(1) + \dots + \ln(n) \leq (n+1) \ln(n+1) - n$$

En efecto, sea x un natural, digamos

$x = k$, $k \in \mathbb{N}$. De (a) tomamos la primera desigualdad

$$x = k \Rightarrow 1 + \ln(k) < (k+1) \ln(k+1) - k \ln(k)$$

Sumamos de $k = 1, \dots, n$, con n arbitrario

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n (1 + \ln(k)) < \sum_{k=1}^n (k+1) \ln(k+1) - k \ln(k) \quad \left. \vphantom{\sum_{k=1}^n} \right\} \text{telescopio}$$

Luego usando telescopica obtenemos

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=1}^n \ln(k) < (n+1) \ln(n+1) - 1 \cdot 0$$

$$\Rightarrow n + \sum_{k=1}^n \ln(k) < (n+1) \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln(k) < (n+1) \ln(n+1) - n$$

Encontramos la desigualdad de la derecha

Por otro lado, hagamos lo mismo con la desigualdad de la derecha de la parte (a)

Sea $x = k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (k+1) \ln(k+1) - k \ln(k) < 1 + \ln(k+1) \quad (\star)$$

notemos ahora que queremos obtener $\sum_{k=1}^n \ln(k)$

y eso lo haremos con $\ln(k+1)$, basta considerar que $\ln(1) = 0 \Rightarrow \sum_{k=2}^n \ln(k) = \sum_{k=1}^n \ln(k) \quad (\circledast)$

Luego a $(\star)$ Sumamos de $k=1, \dots, n-1$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \ln(k+1) - k \ln(k)}_{\text{Telescopica}} < \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(n) - 1 \cdot 0 < n-1 + \sum_{k=2}^n \ln(k)$$

CAMBIO DE INDICE

(4)

$$\Rightarrow n \ln(n) < n-1 + \sum_{k=1}^n \ln(k) \quad \text{Por } \textcircled{D}$$

$$\Rightarrow n \ln(n) - (n-1) < \sum_{k=1}^n \ln(k)$$

Luego juntamos ambas desigualdades

$$\Rightarrow n \ln(n) - (n-1) < \sum_{k=1}^n \ln(k) < (n+1) \ln(n+1) - n$$

Si $n=1 \Rightarrow$ la desigualdad de la 129 se vuelve igualdad

$$\Rightarrow \forall n \geq 1$$

$$n \ln(n) - (n-1) \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) < (n+1) \ln(n+1) - n \quad \square$$

P3 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$

Fuerza bruta!

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} \rightarrow \frac{1-1-0}{0-0} = \frac{0}{0} \quad \parallel$$

Pero tenemos L'Hôpital $\parallel$

$$\Rightarrow L \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1) - 2}{1 - \cos(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} \rightarrow \frac{0}{0} //$$

Pero tenemos L'hôpital $\frac{0}{0}$

$$\Rightarrow L \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} \cdot (-1) - 0}{\sin(x)}$$

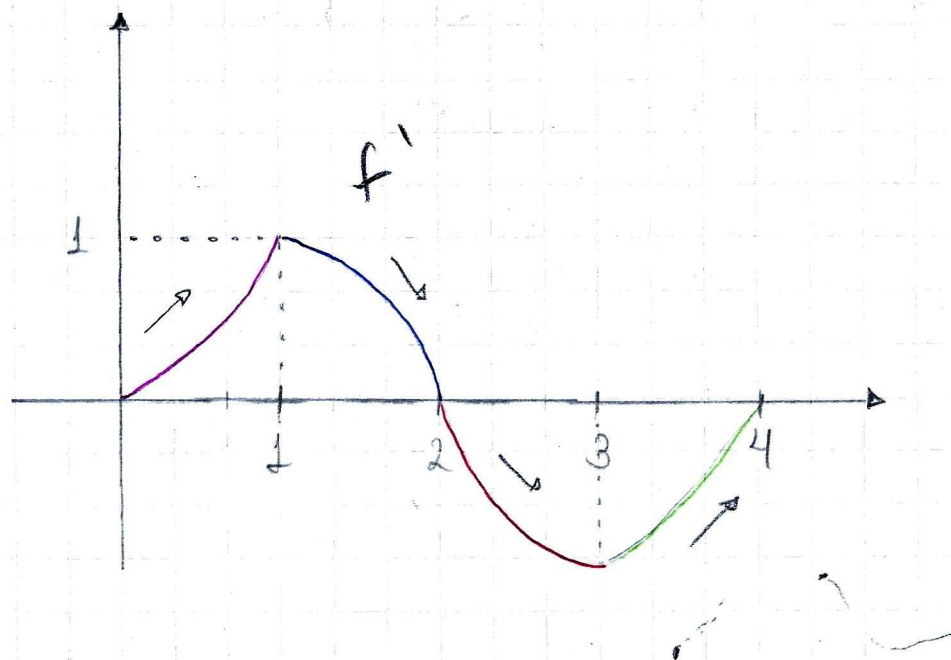
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} \rightarrow \frac{0}{0} //$$

Pero tenemos L'hôpital c:

$$\Rightarrow L \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{\cos(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{1+1}{1} = 2 //$$

P4



Se puede concluir que

1) en $[0,1)$: • $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente

• f' es creciente $\Rightarrow f$ es convexa

• en $x=0$ hay un mínimo local pues a partir de este la función crece (además es convexa)

2) En $[1,2)$: • $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente

• f' es decreciente $\Rightarrow f$ es concava

• $x=2$ es un punto de inflexión pues cambia concavidad

- 3) $[2,3)$:
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreciente
 - f' es decreciente $\Rightarrow f$ es cóncava
 - $x=2$ es máximo global pues f era creciente antes de 2 y decrece después

- 4) $[3,4]$:
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreciente
 - f' es creciente $\Rightarrow f$ es cóncava
 - $x=3$ es punto de inflexión hay cambio de concavidad
 - $x=4$ es mínimo local, f viene decreciendo (además f es cóncava)

Como f es continua (pues existe derivada) y está en un intervalo cerrado $[0,4]$, debe existir mínimo y máximo por TEO Weierstrass

Ya tenemos el máximo! $\Rightarrow x=2$

¿Cuál es el mínimo global? tenemos como candidatos $x=0$ y $x=4$

Resp: No se puede saber cual es el menor

Falta ver que f esta acotada por 3

Usamos TUM. Sea $x \in (0, 4]$, notemos que f es continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$

$\Rightarrow$ por TUM $\exists c \in (0, x)$ tq

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

$$\Rightarrow f(x) = x f'(c) + f(0) = x f'(c) + 1$$

$\Rightarrow f(x) = x f'(c) + 1$, Como el máximo valor se encuentre en $x=2$

$x=2$
 $\Rightarrow$

$$f(2) = 2f'(c) + 1$$

$$\leq 2 \cdot 1 + 1$$

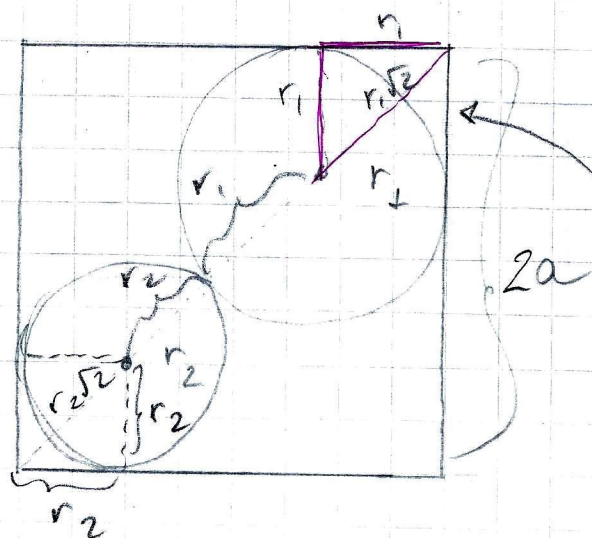
$$= 3$$

$0 \leq f'(x) \leq 1$ en $[0, 2]$

Luego $f(2) \leq 3$, es decir el máximo valor esta acotado $\Rightarrow \forall x \in [0, 4] \quad f(x) \leq f(2) \leq 3$

$\square$

P5



!!

Notar que si hubiere una sola circunferencia



el radio seria a lo más de valor "a"

a) relación para r_1 y r_2 .

Notemos que la diagonal del cuadrado mide $2a\sqrt{2}$ por ser un cuadrado

Por otro lado podemos notar el triángulo del dibujo y con ayuda de esto podemos escribir la diagonal como

$$r_1\sqrt{2} + r_1 + r_2 + r_2\sqrt{2}$$

Juntando todo, tenemos que

$$2a\sqrt{2} = r_1\sqrt{2} + r_1 + r_2 + r_2\sqrt{2} \quad \text{★}$$

b) Determinar r_1 y r_2 para que las áreas sean máximas.

Idea: Ocuparemos la regla de Fermat para buscar candidatos, i.e., $\text{Area}'(x) = 0$ en $(0, a)$

10

$$\Rightarrow \text{Areas}(r_1, r_2) = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \quad \text{Donde } r_1, r_2 \in [0, a]$$

Tenemos que pasarlo a una variable

$\Rightarrow$ por $\otimes$

$$\Rightarrow r_1(\sqrt{2}+1) + r_2(\sqrt{2}+1) = 2a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow r_1 + r_2 = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - r_2$$

$$= C - r_2$$

llamemoslo C para
evitar colocarlo siempre

$$\Rightarrow \text{Areas}(r_1, r_2) = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$\Leftrightarrow f(r_2) = \pi(C - r_2)^2 + \pi r_2^2$$

Luego nuestro candidato para maximizar será la
solución de $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(r_2) &= \pi \cdot 2(C - r_2) \cdot (-1) + \pi \cdot 2r_2 \\ &= 2\pi(r_2 - C) + 2\pi r_2 \end{aligned}$$

↑
Importante
ver (!!)
en la
plana
anterior

Luego $f'(r_2) = 2\pi(r_2 - c) + 2\pi r_2$
 $= 2\pi r_2 - 2\pi c + 2\pi r_2$
 $= 4\pi r_2 - 2\pi c$

CANDIDATO $\Rightarrow f'(r_2) = 0$

Enfasis
En
CANDIDATO!

$\Leftrightarrow 4\pi r_2 - 2\pi c = 0$

$\Rightarrow r_2 = \frac{2\pi c}{4\pi} = \frac{c}{2}$

CANDIDATO
Para
max

Para que sea efectivamente el máximo ^{local} se debe tener que $f''(r_2) < 0$ (queremos concava no)
 convexa

$\Rightarrow f''(r_2) = 4\pi > 0$!!

Encontramos un mínimo y no un máximo

¿De adonde sacó más candidatos $\frac{1}{n}$?

¿Será que no hay máximo?

Primero $f(r_2) = \pi(c - r_2)^2 + \pi r_2^2$ es continua

y como $r_2 \in [0, a] \Rightarrow f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$

Luego es continua sobre un cerrado y acotado
por el TEO de Weierstrass debe existir el
máximo.

Ahora, nosotros hicimos un procedimiento en
donde el candidato estaba en $(0, a)$ y
fue nuestro único candidato por lo que

Seguir trabajando en $(0, a)$ no tiene sentido

¿Dónde puede estar mi candidato "P"?

EN LA FRONTERA DEL CJO!

¡Falta ver que ocurre en $r_2 = 0$ o $r_2 = a$

Como existen ambos círculos $\Rightarrow r_2 \neq 0$

$\Rightarrow r_2 = a \Rightarrow$ por la relación de la parte (a)

$$\rightarrow r_1 = \frac{2a\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - a = \frac{2a\sqrt{2} - a - a\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2} - a}{1+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{-a(1 - 2\sqrt{2} + 2)}{1 - 2} = a(3 - 2\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow r_2 = a, \quad r_1 = a(3 - 2\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{area} &= \pi a^2 + \pi (a(3 - 2\sqrt{2}))^2 \\ &= \pi a^2 + \pi a^2 (9 - 12\sqrt{2} + 8) \\ &= \pi a^2 (10 - 12\sqrt{2} + 8) \\ &= \pi a^2 (18 - 12\sqrt{2})\end{aligned}$$

10