MA1002-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 2: Continuidad II

18 de agosto de 2017

- **[TVI o Bolzano]** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\overline{x} \in [a,b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.
- **[TVI-Generalizado]** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c,d \in f([a,b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c,d], \exists \overline{x} \in [a,b]$ tal que $f(\overline{x}) = x_0$
- **[Teorema de Weierstras]** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a,b]$.
- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.
- **[Continuidad Uniforme]** Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$(\forall x, y \in A) \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

  Es decir, f será uniformemente continua si δ únicamente depende de ε y no del eventual $\overline{x}$ que puedo estudiar.
- Toda función uniformemente continua es continua.
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y sólo si es continua en todo punto $\overline{x} \in A$

P1. [P2.a) C1 2012-2]
Considere la familia de polinomios $g_n(x) = x^n + x - 1$.

a) Probar que $\forall n \geq 1,\ g_n(x)$ tiene una raíz r_n positiva

b) Demuestre que la sucesión de raices $(r_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente.

P2. *a*) Considere $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que f es continua. Demuestre que f tiene un punto fijo, es decir

$$\exists \overline{x} \in [0,1],\ f(\overline{x}) = \overline{x}$$

b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe que $\exists c,d \in \mathbb{R}$ tal que $f([a,b]) = [c,d]$

c) Demuestre que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que

$$f(x_0) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

P3. *a*) Sea la función $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$. Demuestre que es continua y que existe un único real $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

b) Demuestre que la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene solución.

P4. Una función se denomina función de Lipschitz, si cumple con:

$$\exists L > 0,\ \forall x, y \in Dom(f),\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Demuestre que si f es Lipschitz, entonces es uniformemente continua

P5. [P1 a) Control 1 - 2011]
Estudie la continuidad uniforme en $(0,1)$ de las siguientes funciones:

a) $xsin(1/x)$

b) $f(x) = e^x cos(\frac{1}{x})$

P6. ($\star$) Sea $f : [0, +\infty) \to R$ una función continua en todo su dominio y es tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ con $L \in \mathbb{R}$. El objetivo de esta pregunta es probar que f es uniformemente continua, para eso siga los siguientes pasos:

a) Demuestre que f es uniforme continua en el intervalo $[N_\varepsilon, +\infty)$ donde N_ε es un valor que depende de ε dado por $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

b) Pruebe que f es uniformemente continua en el intervalo $[0, N_\varepsilon]$

c) Estudie el caso faltante y concluya

d) [**Propuesto**] Si ahora $Dom(f) = \mathbb{R}$ y cumple que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L$. Demuestre que f es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

Propuestos

P7. Considere la familia de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ por $f_n(x) = cos^n(x), \forall x \in \mathbb{R}$

a) Pruebe que f_n tiene al menos un punto fijo.

b) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que x_n es un punto fijo de f_n. Pruebe que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene al menos una subsucesión convergente.

P8. Sean $f, g : [0,1] \to [0,1]$ dos funciones continuas tal que f es sobreyectiva. Demuestre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = g(c)$.

P9. [P3 c) Control 1 - 2016 - otoño]
Demuestre que al calentar un aro siempre existen dos puntos diametralmente opuestos a la misma temperatura.
Ind: *Sea $T(\alpha)$ la temperatura en función del ángulo en radianes. Considere la función auxiliar $f(\alpha) = T(\alpha) - T(\alpha + \pi)$.*

P10. Definimos la función en $\mathbb{R}$.

$$tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

a) Verifique que tanh es continua en todo $\mathbb{R}$, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface $-1 < \tanh(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Pruebe que si $n \to \infty$, entonces $tanh(n) \to 1$ y que $tanh(-n) \to -1$.

c) Usando el T.V.I. demuestre que $\forall y \in (-1,1), \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.
Ind: analice $y > 0, y = 0, y < 0$

d) Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$

P11. ($\star$) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica, de periodo $p > 0$. Pruebe que f es uniformemente continua.

P12. ($\star$) [**Álgebra de funciones uniformemente continuas**]
Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas, demuestre que

a) $f + g$ y λf con $\lambda \in \mathbb{R}$ tambien lo son.

b) Demuestre que la función x^2 **no** es uniformemente continua.

c) Demuestre que no necesariamente $f \cdot g$ será uniformemente continua.

d) Suponga ahora que $g : S \to \mathbb{R}$ es continua uniforme y $f : T \to \mathbb{R}$ continua uniforme, con $g(S) \subseteq T$. Pruebe que $f \circ g$ es uniformemente continua.

P13. [**P2** *a*) **Control 1, Año 2016**]
Sean f, g, h las funciones definidas por:

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor, \quad g(x) = \sin(\pi f(x)), \quad h(x) = \cos(\pi f(x))$$

a) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $[0, 1)$.

c) [**Propuesto**] Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de puntos de discontinuidad de f. Muestre que $|\mathcal{H}| = |\mathbb{N}|$

P14. ($\star$) Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Muestre que existen constantes $a, b \geq 0$ tales que

$$|f(x)| \leq ax + b, \ \forall x \geq 0$$