MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 15: Series de Potencias

01 de Diciembre de 2017

P1. Encuentre el radio e intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{3/2}} x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right)(x-1)^n$, con $0 < a < b$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{2n}$

P2. Dada la siguiente ecuación diferencial

$$xf'(x) + f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Encontrar una serie de potencias para f.

P3. Encuentre una serie de potencias para la función $f(x) = ln(1+x^2)$.

Indicación: Comience por desarrollar la derivada en la forma $f'(x) = 2x \sum a_n x^n$

P4. El desarrollo en serie para cierta función f es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$$

Cuyo intervalo de convergencia es $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ (no lo demuestre)

a) Determine la serie que representa $f'(x)$, y preséntela como una función conocida.

b) Determine $f(x)$

c) Utilice lo anterior para calcular el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

P5. Obtener la serie de potencias de xe^x en torno a $x = 0$ para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$$

Recuerdo:

- **[Series de Potencias]**: Una serie de potencias es una serie de la forma: $\sum_{k=0} a_k(x-\alpha)^k$, para este curso estudiaremos el caso de $\alpha = 0$.
- **[Radio de convergencia]**: Se define el radio de convergencia R como

$$R = \sup\{x_0 : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k < \infty\}$$

- **[Intervalo de convergencia]**: Se llama intervalo de convergencia al intervalo I tal que $\forall x \in I$ la serie de potencias converge, se debe cumplir que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.

  Por lo que para calcular el intervalo de convergencia I se necesita encontrar R, con esto garantizamos que I a lo menos será el intervalo abierto $(-R, R)$, luego se estudia la frontera, es decir, se estudia si la serie converge para $x = R$ o $x = -R$, en caso de converger en alguno de estos valores, se añadirá al intervalo $(-R, R)$, de esta forma se corrobora que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.
- Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias de la forma $\sum_{k\geq n_0} a_n x^n$ existe las siguientes tres formas (todas entregaran el mismo valor si existe), cual usar dependerá del ejercicio.

  1) $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
  2) $L = \lim\limits_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}}$
  3) $L = \lim\limits_{n\to\infty} sup_{k\geq n}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$

  En caso de existir L se tiene que el radio de convergencia es: $R = \dfrac{1}{L}$
- Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia I , definimos:

$$f(x) = \sum a_k x^k$$

  Esta función es continua, derivable e integrable. Más aún las integrales y derivadas son término a término, esto es que la derivada o la integral la pueden "pasar"para dentro de la serie
- Dadas dos series de potencias $\sum a_k x^k$ y $\sum b_k x^k$ convergentes para x_0. Entonces la serie $\sum(a_k + b_k)x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum(a_k + b_k)x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$. Además si $c_k \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j}$, la serie $\sum c_k x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum c_k x^k = (\sum a_k x^k)(\sum b_k x^k)$.
- Aprenderse $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$ y sus variantes y traslaciones como:
  - $f(-x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ para $|x| < 1$
  - $f(x-1) = \dfrac{1}{1-(x-1)} = \dfrac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$ para $|x-1| < 1$

  Y ocupar derivadas e integrales para calcular otras funciones (por ejemplo logaritmos).