MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 14: Series

24 de noviembre de 2017

P1. [Malla vieja - Control 6 - 2004]

a) Dada la serie $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots$ se pide escribir su suma parcial s_n, demostrar que la serie converge y calcular su valor.

b) Estudie la convergencia absolta y condicional de las series

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{sen(n^2)}{\sqrt{n^4+4}}$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

c) Sea $g:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ continua y creciente en $[0,1]$, con $g(0)=0$.
Pruebe que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}g(\frac{1}{n})$ converge si y solo si la integral $\displaystyle\int_0^1\frac{g(x)}{x^2}dx$ converge.

P2. Estudie la convergencia de las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}ln(1+\frac{1}{n^2})$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{ln(n)}{\sqrt[n]{n+1}}$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(ln(n))^p}$

f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}cos(n\pi)arctan(\frac{1}{2n+1})$

P3. Determine para qué valores de $\alpha\in\mathbb{R}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}$ converge

P4. Sea (a_n) una sucesión de terminos positivos. Demuestre que si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge.

Recuerdo:

- Una sucesión (x_n) se dirá de Cauchy si:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N, \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

- Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.
- Sea (a_n) una sucesión. Luego $\sum a_k$ converge si y sólo si:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ m > n \implies \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

- Si $\sum a_k$ converge, entonces $a_n \to 0$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces la siguiente suma converge:

$$\sum(a_k + \lambda b_k) = \sum a_k + \lambda \sum b_k$$

- Una serie de términos no negativos converge si y solo si las sumas parciales son acotadas superiormente.
- **Comparación:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de manera que existe n_0 y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k < \infty$, entonces $\sum a_k < \infty$.
- **Comparación por Cuociente:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones positivas tales que $c = \text{lím}\, \frac{a_n}{b_n}$ existe.
  1. Si $c = 0$ y $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.
  2. Si $c > 0$, $\sum b_k$ converge si y sólo si $\sum a_k$ converge.
- **Criterio del Cuociente:** Sea (a_n) una sucesión tal que $r = \text{lím}\, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe.
  1. Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
  2. Si $r > 1$ entonces $\sum a_k$ diverge.
  3. Si $r = 1$ no se sabe.
- **Criterio de la Raíz:** Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos tal que $r = \text{lím}(a_n)^{1/n}$ existe.
  1. Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
  2. Si $r > 1$ entonces $\sum a_k$ diverge.
  3. Si $r = 1$ no se sabe.

  Obs: En este criterio se puede reemplazar r por $r = \text{lím}\sup_n a_n = \text{lím}_n \sup\{a_k : k \geq n\}$
- **Criterio de la Integral:** Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f : [k, \infty) \to \mathbb{R}_+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n \geq k} f(n)$ converge si y sólo si $\int_k^\infty f(x)dx$ converge.
- Sea (a_k) una sucesión. Diremos que $\sum a_k$ es absolutamente convergente si $\sum |a_k|$ converge.
- Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además una serie es absolutamente converge si y sólo si la series de sus términos negativos y la de sus términos positivos convergen.
- Si una serie converge, pero no converge absolutamente se le dirá condicionalmente convergente.
- **Criterio de Leibnitz:** Sea (a_n) una sucesión decreciente tal que $a_n \to 0$. Entonces $\sum(-1)^n a_n$ es convergente.
- Sea (a_k) una sucesión. Si $\sum |a_k|$ converge, luego cualquier reenumeración (b_k) verifica que $\sum b_k = \sum a_k$ converge.
- Sea (a_k) tal que $\sum a_k$ es condicionalmente convergente. Luego para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe una reenumeración b_n tal que $\sum b_k = \alpha$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series absolutamente convergentes, entonces su producto es $\sum c_k$, donde (c_k) es cualquier sucesión que contiene exactamente una vez cada producto posible. En particular podemos tomar $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.