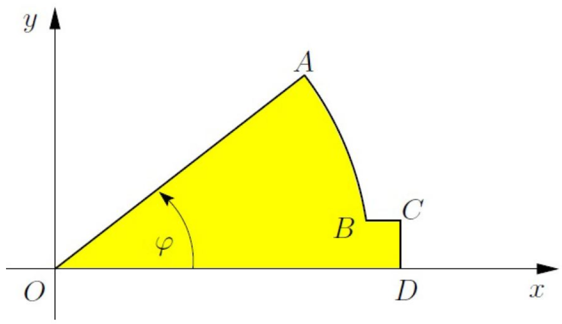
MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Auxiliares: Vicente Salinas &
Marcelo Navarro

Soluciones Guia Control 3

A darlo vuelta

P1. Un trompo se genera por la rotación en torno al eje OX de la curva $OABCD$ mostrada en la figura



OA: es un trazo recto inclinado en un ángulo φ,

AB: es un arco de circunferencia de radio R y centro en O,

BC: es un trazo horizontal,

CD: es un trazo vertical *de largo 1*, ubicado en $x = R + 1$.

a) Escriba, en términos de R y φ, las ecuaciones de las funciones que definen los tramos OA, AB y BC de la curva y encuentre las coordenadas de los puntos A,B y C.

b) Encuentre el área total de la superficie exterior del trompo.

Solución:

a)
- OA esta definido por $y = tan(\varphi)x$
- AB esta definido por $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$
- BC esta definido por $y = 1$
- $A = (Rcos(\varphi), Rsen(\varphi)), \quad B = (\sqrt{R^2 - 1}, 1), \quad C = (R + 1, 1)$

Por lo que el trompo se modela como:

$$f(x) = \begin{cases} tan(\varphi)x & si \quad x \in [0, Rcos(\varphi)] \\ \sqrt{R^2 - x^2} & si \quad x \in [Rcos(\varphi), \sqrt{R^2 - 1}] \\ 1 & si \quad x \in [\sqrt{R^2 - 1}, R + 1] \end{cases}$$

b) La superficie total, S es igual a la siguiente expresión

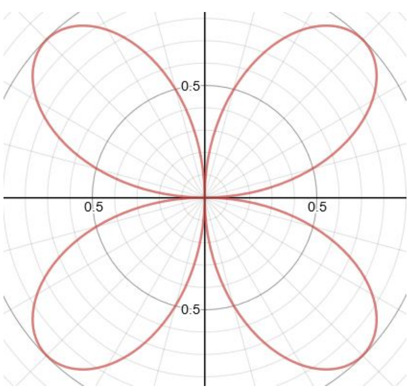
$$S = 2\pi \int_0^{Rcos(\varphi)} (tan(\varphi)x)\sqrt{1 + ((tan(\varphi)x)')^2}dx + 2\pi \int_{Rcos(\varphi)}^{\sqrt{R^2-1}} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + ((\sqrt{R^2 - x^2})')^2}dx$$
$$+2\pi \int_{\sqrt{R^2-1}}^{R+1} 1\sqrt{1 + (1')^2}dx + \pi \cdot 1^2$$

Donde la $\pi \cdot 1^2$ representa la tapa circular que se forma al rotar el segment CD

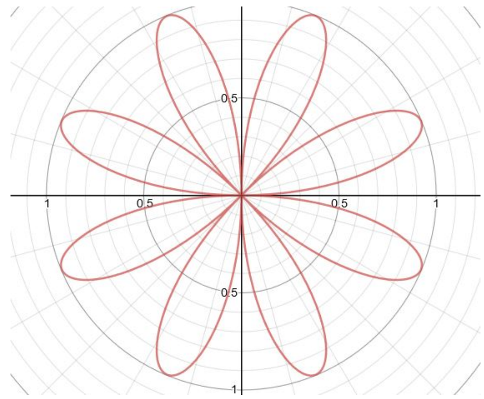
P2. Probar que el área encerrada por los 2n lazos de $r = a\sin(n\theta)$, con n par es independiente de n. ¿Que sucede para el caso de n impar?

Solución:

Notemos que si n es par, entonces la curva polar $r = asin(n\theta)$ forma $2n$ pétalos o lazos



(a) $n = 2$



(b) $n = 4$

Figura 1: Ejemplos para $n = 2$ y $n = 4$

Ahora calculemos el área de un pétalo y luego multiplicamos por los $2n$ que hay. Para esto basta notar que en $\theta = 0$ se tiene que $r = 0$, y para $\theta = \frac{\pi}{n}$ se tiene, igualmente, que $r = 0$ por lo que aquí es cuando se forma un pétalo. Luego

$$A = 2n \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} (asen(n\theta))^2 d\theta = n \int_0^{\frac{\pi}{n}} a^2 sen^2(n\theta) d\theta = \frac{na^2}{2} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\pi a^2}{2}$$

Lo cual no depende de n.

Por otro lado si n es impar, voy a tener la mitad de pétalos que conseguía cuando n era par. Entonces

$$A_{impar} = \frac{A_{par}}{2}$$

P3. Calcular el área de la región fuera del cardioide $\rho = 2(1 - \cos(\phi))$ y dentro del círculo $\rho = -6\cos(\phi)$.

Solución: La pauta esta en el control 2014-3 de Uribe

P4. Sea $a > 0$ considere la región limitada por los ejes y el arco de circunferencia de centro (a, a) y radio a.

a) Calcule el área de la región.

Solución: Para calcular el área de la región primero es necesario parametrizar el circulo de centro (a, a) y radio a:
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 \Rightarrow y = a - \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$, se escoge el valor negativo de la raíz pues nos interesa el semicírculo inferior.
Los limites de x estarán dados por los valores en los que intercepta a los ejes, los cuales son: $x = 0$ y $x = a$. Por lo tanto el área es:
$A = \int_0^a y dx = \int_0^a a - \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx$, esta integral entrega como resultado: $a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$
(el cambio conveniente es $(x - a) = a \sin(u)$).
Observación: Notar que también se pudo haber calculado el área como la de un cuadrado de largo a menos la de un cuarto de círculo de radio a.

b) Calcule el centro de gravedad de la región

Indicación: Puede serle útil recordar :$X_G = \dfrac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \wedge Y_G = \dfrac{\int_a^b \frac{f(x)^2}{2} dx}{\int_a^b f(x) dx}$

Solución:

Para calcular las coordenadas del centro de gravedad notamos que faltan: $\int_a^b \frac{f(x)^2}{2} dx$ y $\int_a^b x f(x) dx$.

$$\int_a^b \frac{f(x)^2}{2} dx = \int_0^a \frac{a^2 - 2a\sqrt{a^2 - (x-a)^2} + a^2 - (x-a)^2}{2} dx = a^3 - \frac{\pi a^3}{4} - \frac{a^3}{6} = a^3 \left(\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Para el caso de la otra integral se tiene que:

$$\int_a^b x f(x) dx = \int_0^a ax - x\sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx = \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{\pi a^3}{4}$$

Por lo tanto al reemplazar:

$$X_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{\frac{a^3(10-3\pi)}{12}}{\frac{a^2(4-\pi)}{4}} = \frac{a(10-3\pi)}{3(4-\pi)} \wedge Y_G = \frac{\int_a^b \frac{f(x)^2}{2} dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{\frac{a^3(10-3\pi)}{12}}{\frac{a^2(4-\pi)}{4}} = \frac{a(10-3\pi)}{3(4-\pi)}$$

Asi que el centro de gravedad es $\left(\frac{a(10-3\pi)}{3(4-\pi)}, \frac{a(10-3\pi)}{3(4-\pi)}\right)$

P5. Sea $n \geq 1$ encuentre el centroide de la región entre $f(x) = x^n$ y la recta $x = 1$. Muestre que sucede si $n \to \infty$

Solución:

Las coordenadas del centro de masa son

$$X_G = \frac{\displaystyle\int_0^1 x \cdot x^n dx}{\displaystyle\int_0^1 x^n dx} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$Y_G = \frac{\displaystyle\int_0^1 \cdot x^2 n dx}{2\displaystyle\int_0^1 x^n dx} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2}{n+1}} = \frac{n+1}{4n+2}$$

Cuando $n \to \infty$ el centroide converge a $(1, \frac{1}{4})$

P6. Considere las funciones $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas para $x \in [0, \pi]$. Se define la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi],\ y \in [f(x), g(x)]\}$

a) Demuestre que $\forall x \in [0, \pi]$, $g(x) \geq f(x)$.

b) Calcule el área de la región R.

c) Encuentre la posición del centro de gravedad de la región R

d) Determine el perimetro de la región R.

Solución

a) Para probar que $g(x) \geq f(x)$, se define la función auxiliar $h(x) = g(x) - f(x)$ que es derivable, y aqui se prueba que $h(x) > 0$ (que es analogo a lo que se quiere probar). Notemos que $h(0) = h(\pi) = 0$ si probamos mediante crecimientos que h empieza a crecer desde $x = 0$ y se mantiene positivo sobre el eje x ganamos. Para esto veamos su crecimiento.

$$h'(x) = \pi - 2x - cos(x),\ x \in [0, \pi]$$

Mediante inspección (cachativa) nos damos cuenta que $h'(\frac{\pi}{2}) = 0$ y es el unico punto critico ya que $-2x$ es estrictamente decreciente (por lo que no vuelve a subir ni a pasar por otro punto de altura similar). Luego notamos que $h''(x) = -2 + sen(x) < 0$ por lo tanto h es cóncava, lo que vuelve a $\frac{\pi}{2}$ es un máximo local. por lo que se cumple que
$h(x)$ es creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y es decreciente en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ por lo que necesariamente $h(x) \geq 0$ lo que equivale a que $g(x) \geq f(x), x \in [0, \pi]$

b) El área de la región es simplemente el area bajo la curva de $g(x)$ menos el área bajo la curva de $f(x)$ (esto debido a que $g(x)$ es más grande).

$$A_R = \int_0^\pi (g(x) - f(x))dx = \int_0^\pi (\pi x - x^2 - sen(x))dx = \left(\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + cos(x)\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{6} - 2$$

c) El centro de gravedad de R se calcula como:

$$X_G = \frac{\int_0^\pi x\,(g(x)-f(x))\,dx}{A_R} \qquad Y_G = \frac{\int_0^\pi \left(g^2(x)-f^2(x)\right)dx}{A_R}$$

d) El perimetro se calcula como

$$\begin{aligned} P &= L(g)+L(f) \\ &= \int_0^\pi \sqrt{1+(g'(x))^2}dx + \int_0^\pi \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \end{aligned}$$

P7. Sea $P, Q \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización arbitraria de una curva Γ con $\vec{r}(a) = P$ y $\vec{r}(b) = Q$. Probar que $L(\Gamma) \geq \|v\|$, donde $v = Q - P$, es decir el segmento entre P y Q entrega el menor camino posible. Para esto siga los siguientes pasos:

a) Considere la integral $\int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\cdot v dt$ y calcule su valor.

b) Concluya utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz $u \cdot v \leq \|u\|\|v\|$

Solución:

a) Consideremos $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ donde $r_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $v_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$. Entonces

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\cdot v = \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \\ r_3'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = r_1'(t)v_1 + r_2'(t)v_2 + r_3'(t)v_3$$

Luego, ocupando que $\vec{r}(a) = P$ y $\vec{r}(b) = Q$.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\cdot v dt &= \int_a^b (r_1'(t)v_1 + r_2'(t)v_2 + r_3'(t)v_3)dt \\ &= \int_a^b r_1'(t)v_1 dt + \int_a^b r_2'(t)v_2 dt + \int_a^b r_3'(t)v_3 dt \\ &= v_1\int_a^b r_1'(t)dt + v_2\int_a^b r_2'(t)dt + v_3\int_a^b r_3'(t)dt \\ &= v_1\cdot(r_1(b)-r_1(a)) + v_2\cdot(r_2(b)-r_2(a)) + v_3\cdot(r_3(b)-r_3(a)) \\ &= v_1\cdot v_1 + v_2\cdot v_2 + v_3\cdot v_3 \\ &= v_1^2+v_2^2+v_3^2 \\ &= \|v\|^2 \end{aligned}$$

b) Consideremos nuevamente la integral $\int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\cdot v dt$ Usaremos Cauchy-Schwarz sobre $\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\cdot v$.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\cdot v dt &\leq \int_a^b \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\| \cdot \|v\| dt \\ &= \|v\| \int_a^b \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\| dt \\ &= \|v\|\cdot L(\Gamma) \end{aligned}$$

Ocupando el resultado de a) se tiene que

$$\int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt = \|v\|^2 \leq \|v\| \cdot L(\Gamma)$$

Tomando la ultima desigualdad y pasando diviendo $\|v\|$, se concluye que

$$\|v\| \leq L(\Gamma)$$

P8. Escribir la ecuación paramétrica del lugar geométrico constituido por todos los puntos cuyo producto de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (tal que $dist(F_1, F_2) = 2a$) es una magnitud constante igual a a^2, con $a > 0$. Utilice coordenadas polares.

Solución

Sea (x, y) un punto de la curva, fijando F_1 y F_2, tenemos que una posible instancia es que F_1 posee coordenadas $(-a, 0)$ y F_2 posee coordenadas $(a, 0)$ (por ejemplo pueden ser los focos de una elipse). Luego aplicando la condición

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2$$

elevamos al cuadrado y con un poco de algebra obtenemos que

$$(x^2 + y^2 + a^2 + 2ax)(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax) = a^4$$

Lo ultimo es una suma por diferencia

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

Aqui aplicamos polares, recordando que $x^2 + y^2 = r^2$ y $x = rcos(\theta)$

$$(r^2 + a^2)^2 - 4a^2r^2cos^2(\theta) = a^4$$

De aqui despejando r, considerando que $r > 0$, se obtiene que $r = \sqrt{2acos(\theta)}$. Luego parametrizando se tiene que

$$\vec{r}(\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta)) = (\sqrt{2acos(\theta)} \cdot cos(\theta), \sqrt{2acos(\theta)} \cdot sen(\theta))$$

P9. [P2 a) Examen Recuperativo 2010-2]

Considere la curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \left(\int_0^t cos\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du, \int_0^t sen\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du \right) \qquad t \in [0, \infty)$$

Donde c es una constante positiva. Encuentre

a) $\hat{T}(t), \hat{N}(t), \hat{B}(t)$ y su $\kappa(t)$

b) De un argumento geométrico de porque la torsión es 0 y corrobore esto mediante el calculo según su respectiva formula.

P10. Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ y } (z - x)(z + x) = y^2$$

a) Encuentre una parametrización de Γ. ($a > 0$)

Solución: Falto agregar al enunciado $z > 0$. Notar que $(z - x)(z + x) = y^2 \iff z^2 = x^2 + y^2$ y al interceptar las dos ecuaciones se tiene que:

$z^2 = a^2 \Rightarrow z = a$ y como $x^2 + y^2$ puede para metrizarse facilmente con cos y sin se tiene que:

$\vec{r}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), a)$.

b) Calcule el centro de masa dada por $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Solución:
Por lo tanto $\rho(\vec{r}(t)) = 3(cos(t) + sin(t)) + a$.

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = (-3\sin(t), 3\cos(t)) + 0)$.

$\left|\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = 1$

$M = \displaystyle\int_0^{2\pi} \rho(\vec{r}(t)) \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| dt = \int_0^{2\pi} (3\cos(t) + 3\sin(t) + a)dt = 2a\pi a$

Ahora para sacar el centro de masa se debe usar la fórmula:

$x_g = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_\Gamma x\rho dl \wedge y_g = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho dl \wedge z_g = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho dl$

El resultado es $(\dfrac{9}{2a}, \dfrac{9}{2a}, a)$

P11. Encontrar todas las funciones $f(t)$ tales que la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (e^t, f(t), \lambda f(t))$, con $t \in \mathbb{R}$ y λ una constante real, sea una recta.

Solución: No hacerlo pifia vicho :C

P12. Sea una curva Γ que cumple con que existe un punto P_0 por el cual pasan todas las rectas normales de Γ. Se define $P_0 = \vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)$, donde $\vec{\sigma}(s)$ es la parametrización en longitud de arco de Γ, $(\hat{N})(s)$ es el vector normal a Γ y ϕ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ con $\phi : [0, l_0] \to \mathbb{R}$. Demuestre que $\kappa(s) = 1$, $\tau(s)\phi(s) = 0$ y $\phi'(s) = 0$, donde $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son la curvatura y la torsión respectivamente. Concluya que Γ es una curva plana.

Indicación: Quizás le sea útil ocupar que $\hat{T}, \hat{N}$ y $\hat{B}$ son linealmente independientes.

Definición: (Independencia Lineal) *Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq R^n$ diremos que estos vectores son linealmente independientes si $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1, \ldots, m$*

Solución:

Consideremos la igualdad $P_0 = \vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)$, Derivando a ambos lados se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dP_0}{ds} &= \frac{d}{ds}\left(\vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)\right) \\
\vec{0} &= \frac{d\vec{\sigma}}{ds}(s) + \phi'(s)\hat{N}(s) + \phi(s)\frac{d\hat{N}}{ds}(s) \\
\vec{0} &= \hat{T}(s) + \phi'(s)\hat{N}(s) - \kappa(s)\hat{T}(s) + \tau(s)\hat{B}(s) && \textit{(Formula de Frenet)} \\
\vec{0} &= \underbrace{(1 - \kappa(s)\phi(s))}_{\lambda_1}\hat{T}(s) + \underbrace{\phi'(s)}_{\lambda_2}\hat{N}(s) + \underbrace{\phi(s)\tau(s)}_{\lambda_3}\hat{B}(s)
\end{aligned}$$

De lo anterior, notando que $\kappa(s), \phi(s), \phi'(s)$ y $\tau(s)$ son funciones en los reales, podemos aplicar la independencia lineal de $\hat{T}, \hat{N}$ y $\hat{B}$.

Por lo que se obtiene las siguientes igualdades

$$\begin{array}{ccccccc}
1 - \kappa(s)\phi(s) & = 0 & \Rightarrow & \kappa(s)\phi(s) = 1 & \Rightarrow & \phi(s) \neq 0 \\
\phi'(s) & = 0 & \Rightarrow & \phi'(s) = cte \neq 0 & & \\
\phi(s)\tau(s) & = 0 & \Rightarrow & \tau(s) = 0 & \Rightarrow & \text{Curva Plana}
\end{array}$$

Notar que en la primera igualdad, si $\phi(s) = 0$ entonces se tendria que $0 = 1$ lo que es una contradicción, por lo que $\phi(s) \neq 0$

P13. Se tiene una curva regular Γ en $\mathbb{R}^3$, parametrizada en longitud de arco por $\vec{r}(s)$, con curvatura $k(s)$ y torsión $\tau(s)$. Determinar la curvatura de $\dfrac{d\vec{r}(s)}{ds}$.

P14. Considere la curva Γ descrita por $\vec{r}(t) = f(t)(cos(t), sen(t))$ con $t \in [0, \infty)$. Donde f es de clase $\mathcal{C}^1$ y $0 \leq f(t) \leq 1, \forall t \geq 0$.

a) Muestre que si $L(\Gamma)$ es finito y f decreciente, entonces $f(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$

b) Muestre que si $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$, entonces $L(\Gamma)$ es infinito.

c) Si $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2}$. ¿Es finito $L(\Gamma)$?

d) Caracterize (en terminos de existencia de integrales impropias) las funciones f tales que $L(\Gamma)$ es finito.

e) Use el resultado de la parte *d*) para mostrar que el resultado de la parte *a*) se mantiene aun sin la hipótesis de que f sea decreciente.

P15. Para las siguientes integrales impropias, identifique su tipo y si diverge o converge.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sen^2(x)}{1+x^2}dx$

b) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x+e^x}dx$

c) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x-e^{-x}}dx$

d) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tan(x)dx$

f) $\displaystyle\int_{1^-}^\infty \frac{4dx}{x^2\sqrt[4]{x^2-1}}$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x}dx, \alpha > 0$

h) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{xln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$

Solución:

a) Converge

b) Converge

c) Diverge

d) Converge

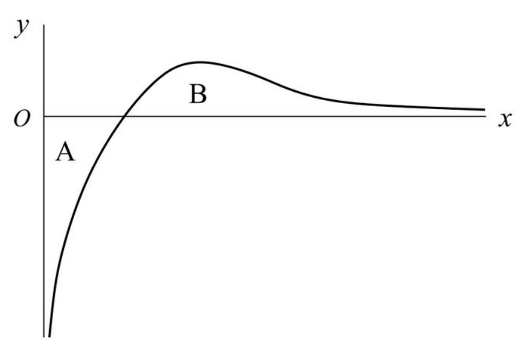
e) Diverge

f) Convege

g) Diverge

h) Converge

P16. Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{ln(x)}{1+x^2}$ (ver figura). Porbar que las áreas de A y B son finitas e iguales. Indicación: para probar la igualdad, use el cambio de variables $y = 1/x$.



Solución: Malla vieja→ Control 3→ Control 6 2003 P1

P17. Determine la convergencia de $\displaystyle\int_{0^+}^\infty \frac{1}{xln^p(x)}dx$ según el valor de $p\in\mathbb{R}$

Haciendo el cambio de variable

$$u = ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

tenemos que la integral a estudiar es equivalente a

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{u^p}$$

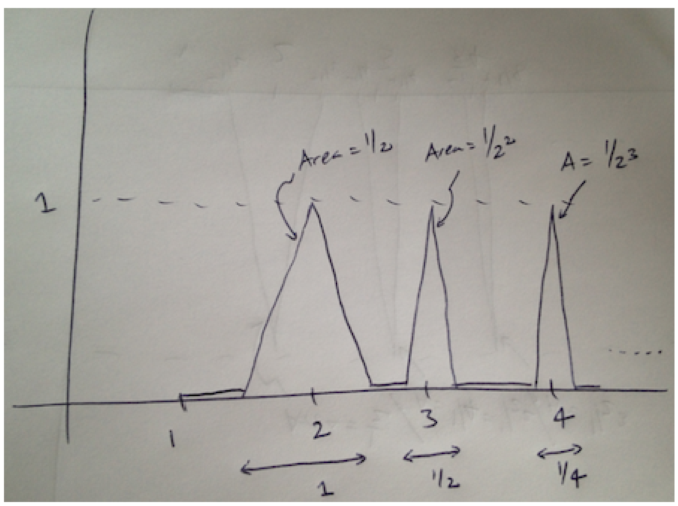
La cual es mixta, ya que hay infinitos en los limites de integración (esto lo hace ser de primera especie) y en $x = 0$ explota la función (esto lo hace ser de segunda especie). Por lo que separando para deshacer las integrales mixtas se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^p} = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} \frac{du}{u^p}}_{1^{era}} + \underbrace{\int_{a}^{0} \frac{du}{u^p}}_{2^{da}} + \underbrace{\int_{0}^{b} \frac{du}{u^p}}_{2^{da}} + \underbrace{\int_{b}^{\infty} \frac{du}{u^p}}_{1^{era}}$$

Y aquí necesitamos que las de primera especie cumplan que $p > 1$ para converger y necesitamos que las de segunda especie cumplan que $p < 1$, lo cual jamás pasará simultáneamente, por lo tanto se concluye que la integral diverge.

P18. Considere $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ existe. Demuestre o refute que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ ¿Podria generalizar su resultado para $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$?

Basta considerar el siguiente contraejemplo



Es decir una función que tenga valor 0 y en cada número natural mayor o igual a 2, se levante un triangulo isoceles de altura 1 y base $(\frac{1}{2}^n)$. Es fácil darse cuenta que el limite de la función no existe debido a que en el infinito puedo estar en 0 o puedo ser la cúspide de un triangulo, es decir, puedo estar en 1. Y por otro lado

$$\int_1^{\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1$$

Donde en la ultima igualdad se calculo el limite a una suma geométrica.

En el caso general basta notar que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \ell = 0$

Por lo que se refuta siempre.

P19. Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

a) Calcule, si existe, el área de la región bajo la curva en el primer cuadrante.

b) Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OX de la región anterior, existe (no lo calcule).

Solución: Ver pauta control 3-2011-2

P20. Para $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua se define la integral:

$$L(f) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)dx$$

a) Demostrar que si existen M y b reales tales que $\forall x \in [0, \infty)$, $|f(x)| \leq Me^{bx}$, entonces la integral $L(f)$ converge para todo $\alpha > b$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y tal que existen los reales de la parte anterior que acotan a $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$. Demostrar que para $\alpha > b$

$$L(f') = \alpha L(f) - f(0)$$

y con esto concluya que:

$$L(f'') = \alpha^2 L(f) - \alpha f(0) - f'(0)$$

c) Pruebe que para $\lambda \in \mathbb{R}$, $L(\lambda f) = \lambda L(f)$ y concluya que:

$$L(sen(\omega x)) = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Solución: Ver pauta control 3-2016-2

P21. Considere la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$

a) Demuestre que la integral es absolutamente convergente.

Solución: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \arctan(b) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto al estar acotada por una constante $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$ converge absolutamente.

b) Concluya que la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$ también lo es.

Solución: Notar que la función $\dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$ es par y como la integral desde 0 a ∞ converge (si converge absolutamente, entonces converge) es valido decir que la de $-\infty$ a ∞ es dos veces esta (dos veces una que converge también converge).

Recordar que en caso de no converger no pueden usarse las propiedades de paridad en las integrales

P22. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x}\,dx$

> **Solución:**
>
> *b*) El cambio apañador es $u = e^x$ y el resultado es 1

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$

> **Solución:**
>
> **P23.** El cambio apañador es $u = 2\tan x$ y el resultado es $\dfrac{\pi}{2}$

P24. Sea f una función de clase C^2 en $[0,1]$, verificando que $f(0) = 0$. Demuestre que la integral:

$$\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}dx$$

Converge

> **Solución:** Para demostrar esto se buscara aumentar el grado de x para que converja.
>
> $$\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}dx = \lim_{a\to 0} f(x)(-2)x^{-\frac{1}{2}}\Big|_a^1 + 2\int_a^1 f'(x)x^{-\frac{1}{2}}dx = N + I$$
>
> Si demostramos que N e I son números se demostrara que converge.
>
> Partamos por N:
>
> $N = \lim_{a\to 0} f(1) - \dfrac{f(a)}{a^{\frac{1}{2}}} =^{L'H} f(1) - \lim_{a\to 0} \dfrac{f'(a)}{a^{-\frac{1}{2}}} = f(1) - \lim_{a\to 0} f'(a)a^{\frac{1}{2}} = f(1) \Rightarrow$ N es un número.
>
> Para no tener inconvenientes al acotar I demostraremos que I, converge absolutamente $2\int_a^1 \left|f'(x)x^{-\frac{1}{2}}\right| dx \leq 2\int_a^1 Mx^{-\frac{1}{2}}dx = 2M\int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$, como f es de clase C^2 se tiene que f' es continua y por ende acotada entre [0,1].
>
> Como se sabe que $\int_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha}dx$, converge para $\alpha < 1$, se tiene que para este caso converge y finalmente I es un número.
>
> Por lo tanto $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}dx$ converge, pues su límite existe.