

Auxiliar 13

P1 Nos piden $A = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$

Vayamos directo a calcular. obs: es de 1^{era} especie

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx \quad \sim \text{hacer desaparecer la raíz}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{u du}{(u^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} u^2 &= 1+x^2 \\ \rightarrow 2u du &= 2x dx \\ \rightarrow u du &= x dx \end{aligned}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{u du}{u^3}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x \rightarrow \infty &\Rightarrow u \rightarrow \infty \\ \text{Si } x=0 &\Rightarrow u=1 \end{aligned}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{du}{u^2}$$

es del tipo $\frac{1}{x^p}$ con

$$p=2 > 1$$

por lo que converge

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{u^{-2+1}}{-2+1} \right) \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\cancel{\frac{-1}{b}^0} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right]$$

$$= 1$$

P2 a) $\int_0^1 \ln(x) dx$ → es de tipo 2 ya que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \rightarrow -\infty$

Calculemos directo

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \ln(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} (x \ln(x) - x) \Big|_a^1$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} (1 \ln(1) - 1) - (a \ln(a) - a)$$

$$= -1 \quad \text{Converge!}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} a \ln(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln(a)}{\frac{1}{a}}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} -\frac{a^2}{a}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} -a = 0$$

b) $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^x \rightarrow$ es de tipo 1

No sabemos integrar esto así que Comparamos, notemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{y además } \frac{\ln(x)}{x} > 0$$

por lo que se puede decir que $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } \forall x \geq x_0$

$$\frac{\ln(x)}{x} \leq k, \text{ con } k > 0$$

Lo anterior es lógico pues si en el infinito me voy a 0 y siempre soy positivo, debe haber un momento en que seré menor que algún valor en específico.

En particular, si $k = e^{-1} > 0$

$$\Rightarrow \frac{\ln(x)}{x} \leq e^{-1} \Rightarrow \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^x \leq e^{-x} \quad \forall x \geq x_0$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-b} - (-e^{-1}) \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

por lo que $\int_1^{\infty} e^{-x}$ converge y por criterio

de comparación $\int_1^{\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^x$ converge

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})} \rightarrow$ es de tipo 2 (mixta) debemos separar

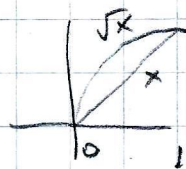
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})} = \underbrace{\int_0^a \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}}_{(I)} + \underbrace{\int_a^{\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}}_{(J)} \quad \text{con } a > 0$$

si $a = 1$

estudiamos (I)

para $x \in [0, 1]$

$$x \leq \sqrt{x}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{x(x+\sqrt{x})} \geq \frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2x x^{1/2}} = \frac{1}{2} x^{-3/2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x(x+\sqrt{x})} dx \geq \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{1}{x^{3/2}} dx \quad \frac{3}{2} < 1$$

↓
diverge

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{x(x+\sqrt{x})} dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{x(x+\sqrt{x})} dx \text{ tambien}$$

d) $\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx \rightarrow \text{mixta}$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2} dx}_{2 \text{ especie}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx}_{1 \text{ especie}}$$

veamos esta usiemos criterio del cociente

en cociente el limite es $x \rightarrow 0$ pues en 0 explota la función

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\arctan(x)}{x^2} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{1} = 1 \neq 0$$

con esta la Compro

Por lo tanto $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$ diverge ya que $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ diverge
 $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$ tambien

e) $\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx \rightarrow$ mixta

$$= \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx + \int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx$$

$\downarrow$
 2 especie
 (I)

$\downarrow$
 1 especie
 (J)

(I) $\therefore$ cociente con $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arctan(x)}{x^{3/2}}}{\frac{1}{x^{1/2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

parte anterior
 $\downarrow$

y $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx$ converge

es $\lim_{x \rightarrow 0}$ pues en 0 explota la función

veamos ahora (J) := Compara con $\frac{1}{x^{3/2}}$

{ Aque es
Lim
 $x \rightarrow \infty$ ye
que es
un caso
particular

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\arctan(x)}{x^{3/2}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

y como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge $p > \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx \text{ converge}$$

Ahora bien, como $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx$ y $\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx$

convergen ambas

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{3/2}} dx \text{ converge}$$

f) $\int_0^1 \frac{\sin(2x)}{x^{3/2}} dx$ usar cociente con $\frac{1}{\sqrt{x}}$

P3 $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx$ mmm difícil, sabemos que $\int_0^{\infty} e^{-x}$ converge pero el seno no sabemos

Convergencia Absoluta

$$\int_0^{\infty} |e^{-x} \sin(x)| dx \leq \int_0^{\infty} e^{-x} dx < +\infty \rightarrow \text{converge}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} |e^{-x} \sin(x)| dx \text{ converge} \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx \text{ tambien}$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^b e^{-x} \sin(x) dx}_J$$

$$J = \int_0^b e^{-x} \sin(x) dx \stackrel{\text{Partes}}{=} -e^{-x} \sin(x) \Big|_0^b + \int_0^b e^{-x} \cos(x)$$

$$= -e^{-x} \sin(x) \Big|_0^b + (-e^{-x} \cos(x) \Big|_0^b - J)$$

$$\Rightarrow 2J = \cancel{-e^{-b} \sin(b)} + \cancel{-e^{-b} \cos(b)} + 1 \quad \lim_{b \rightarrow \infty}$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2}$$

P4 a) Como f es decreciente $\Rightarrow f'(x) \leq 0$
 $\forall x \geq 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |f'(x)| dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b -f'(x) dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} -\cancel{f(b)} + f(0)$$

$\nearrow$ enunciado

$$= f(0) < +\infty$$

pues es
continua en 0.

b) hacer por partes y ocupar (a)