MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 12: Curvas en el Espacio II

10 de noviembre de 2017

P1. [P2 - Control 3 - 2016-2]

Considere la curva Γ parametrizada por $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^t \phi(u)sen(u)du \\ \displaystyle\int_0^t \phi(u)cos(u)du \\ \displaystyle\int_0^t \phi(u)tan(u)du \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2})$, donde $\phi(t) > 0$ es una función continua en $[0, \frac{\pi}{2})$

a) Demuestre que Γ es regular. Calcule $T(t), N(t)$ y la curvatura $\kappa(t)$ en términos de $\phi(t)$. Use estos resultados para determinar $\phi(t)$ de modo que κ sea constante e igual 1.

b) Calcule $B(t)$. Además, sabiendo que (no lo demuestre) $\dfrac{dB}{dt} = s(1+c^2)^{\frac{-3}{2}} \begin{pmatrix} (c^2 - s^2)(2 + c^2) \\ -2sc(2 + c^2) \\ c(2 + c^2) \end{pmatrix}$, donde $s = sen(t)$ y $c = cos(t)$, calcule la torsión τ de Γ en términos de $\phi(t)$ y determine $\phi(t)$ de modo que τ sea constante e igual a -1

P2. Calcular la masa de un alambre cuya forma está dada por la curva $r(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 3]$ y cuya densidad en cada punto es $\rho = \rho(x, y, z) = 2x + 9z$. Calcule su centro de masa (deje expresado como integral).

P3. Sea $r(s)$ una parametrización en longitud de arco de una curva Γ. Demuestre que

$$\frac{dr}{ds} \cdot \left(\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3} \right) = \tau\kappa^2$$

- Sea Γ una curva simple y regular,con parametrización $\overrightarrow{r}(t)$ y parametrización natural $\sigma(s)$. Se tiene que:

	En función de s	En función de t
Velocidad $\vec{v}(t)$		$\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$
Rapidez $v(t)$	$\dfrac{ds}{dt}(t)$	$\left\Vert\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\Vert$
Vector Tangente T	$\dfrac{d\sigma}{ds}(s)$	$\dfrac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \dfrac{\frac{d\vec{r}}{dt}(t)}{\Vert\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\Vert}$
Vector Normal N	$\dfrac{\frac{dT(s)}{ds}}{\Vert\frac{dT(s)}{ds}\Vert}$	$\dfrac{\frac{dT(t)}{dt}}{\Vert\frac{dT(t)}{dt}\Vert}$
Vector Binormal B	$T(s)\times N(s)$	$T(t)\times N(t)$
Curvatura κ	$\left\Vert\dfrac{dT(s)}{ds}\right\Vert$	$\left\Vert\dfrac{\frac{dT(t)}{dt}}{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}\right\Vert$
Radio de Curvatura R	$\dfrac{1}{k(s)}$	$\dfrac{1}{k(t)}$
Torsión τ	$-N(s)\cdot\dfrac{dB(s)}{ds}$	$-N(s)\cdot\dfrac{\frac{dB(t)}{dt}}{\Vert\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\Vert}$

  Obs: Dado una curva Γ, si $\tau = 0$ es una curva plana, por otro lado, si $\kappa = 0$ es una recta

- **Fórmulas de Frenet:** Las siguientes relaciones se tiene al estar evaludas en la parametrización natural s.
  - $\dfrac{d\hat{T}}{ds} = k\hat{N}$
  - $\dfrac{d\hat{N}}{ds} = -k\hat{T} + \tau\hat{B}$
  - $\dfrac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}$

- **Integral de una función sobre una curva**: Sea Γ una curva simple y regular en $\mathbb{R}^n$, y sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función continua. Se define la integral de f sobre la curva Γ mediante:

$$\int_\Gamma f d\ell := \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))\left\Vert\frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt}\right\Vert dt$$

  donde $\overrightarrow{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de Γ.
  Obs: Si f es una densidad lineal de masa ρ, entonces la integral de linea de ρ da como resultado la Masa

$$M = \int_\Gamma \rho d\ell$$

- **Centro de Masa:** El centro de masa de una curva $\Gamma\subseteq\mathbb{R}^3$, cuya densidad lineal de masa $\rho:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, se define como el punto de coordenadas

$$X_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho d\ell \quad Y_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho d\ell \quad Z_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma z\rho d\ell$$