MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 11: Curvas en el Espacio

03 de noviembre de 2017

P1. Sea la parametrización $r(t) = \left(a\cos(t), a\sin(t), \dfrac{ht}{2\pi}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Determine si esta parametrización[1] es suave, regular, simple, cerrada y/o cerrada simple.

P2. Encuentre alguna parametrización para las siguientes curvas

a) La parabola dada por $y = x^2, x \in [0, a]$ en sentido antihorario.

b) El segmento que une el punto $\vec{p} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ y el punto $\vec{q} = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$.

c) El triangulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(3, 3)$.

d) La elipse dada por $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

e) La curva que se obtiene de intersectar un casquete esférico unitario y la superficie de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$.

P3. Una párticula se mueve describiendo una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$, de tal forma que su altura z y el ángulo θ en coordenadas cilindricas cumple la relación $z = e^{-\theta}$ con $\theta \in [0, \infty)$

a) Encuentre una parametrización para Γ y dibuje la curva.

b) Calcule el largo de Γ. Para esto calcule la longitud de arco hasta un angulo θ_0 y luego estudie el caso cuando $\theta_0 \to \infty$

c) Encuentre su parametrización natural.

P4. Sea la curva que se forma al intersectar:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{y} \quad xtanh(z) = y$$

con $0 \leq z \leq 1$ y $x, y \geq 0$. Se pide:

a) Parametrizar la curva y calcular su longitud.

b) Encontrar su parametrización en longitud de arco.

c) Calcule el vector Tangente, Normal y Binormal.

[1] En estricto rigor la cualidad de ser suave, simple, regular,etc. Es de las curvas, sin embargo, usaremos estas propiedades para referirnos de igual forma a las parametrizaciones. Se ruega comprender la diferencia entre curva y parametrización.

- **[Norma euclediana]** Sea $\vec{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, su norma euclideana es
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2}$$
- **[Curva]** $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una función continua $\vec{r} : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$.
- Una curva Γ es:
    - **Suave:** Si admite una parametrización de clase C^1.
    - **Regular:** Si admite una parametrización $\vec{r}(t)$ de clase C^1 tal que $\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| > 0$, $\forall t \in [a, b]$. A este tipo de parametrizaciones se les llama regular.
    - **Simple:** Si admite una parametrización de clase C^1 que sea inyectiva.
    - **Cerrada:** Si admite una parametrización $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que: $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
    - **Cerrada simple:** Si admite una parametrización $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ y que sea inyectiva sobre $[a, b)$.
- **[Parametrizaciones equivalentes]** Sea $\vec{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ y $\vec{r}_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de una curva Γ. $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son equivalentes si existe una función biyectiva $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que
$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\varphi(t)), \forall t \in [a, b]$$
En este caso φ se llamará reparametrización.
- **[Longitud de Curva]** Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ. Definimos la longitud de Γ mediante
$$L(\Gamma) = \int_a^b \|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| dt$$
- **[Longitud de Arco]** Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ. Definimos la función longitud de arco $s : [a, b] \to [0, L(\Gamma)]$ como
$$s(t) = \int_a^t \|\frac{d\vec{r}(\tau)}{dt}\| d\tau$$
- **[Parametrización natural]** Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco ($s(t)$) y luego desde esta relación despejar t en función s, para finalmente encontrar:
$$\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s))$$
- [Observaciones] Cualquier otra parametrización regular conduce a la misma parametrización natural solo que puede variar el sentido (dependiendo del sentido de la parametrización). También se cumple que: $\|\frac{d\sigma}{ds}\|$=1

Sea $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de una curva simple Γ. Definimos

- (*velocidad*) $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)$
- (*rapidez*) $v(t) = \|\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)\| = \dfrac{ds}{dt}(t)$, con s longitud de arco
- (*tangente*) $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \dfrac{\frac{d\vec{r}}{dt}(t)}{\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\|}$
- (*Normal*) $\vec{N}(t) = \dfrac{\frac{dT}{dt}}{\|\frac{dT}{dt}\|}$
- (*Binormal*) $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$