

Auxiliar 11

P1

$$r(t) = (a \cos(t), a \sin(t), \frac{h t}{2\pi}) \quad t \in [0, 2\pi]$$

¿Suave?

Debemos ver si $\vec{r}$ es $C^1 \Leftrightarrow$ por componente sea C^1 .

✓ ! Recordar que C^1 es que se pueda derivar 1 vez y que esa derivada sea continua

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), \frac{h}{2\pi})$$

Es derivable en cada coordenada por algebra y composición de funciones derivables y la derivada es continua por algebra y composición

¿Regular?

debemos ver que es C^1 y que $\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\| > 0$

✓ que sea C^1 ya lo vimos, falta que

$$\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\| > 0$$

! Recuerda $\|(a, b, c)\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$\Rightarrow \|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t) + \frac{h^2}{4\pi^2}}$$

$$= \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} > 0$$

¿Simple?

C^1 + proyectiva.

ya vimos que era C^1 , veamos que es proyectiva

sea t_1 y t_2 en $[0, 2\pi]$ tal que

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$$

$$\Rightarrow (a \cos(t_1), a \sin(t_1), \frac{h}{2\pi} t_1) = (a \cos(t_2), a \sin(t_2), \frac{h}{2\pi} t_2)$$

$$\Rightarrow 1) a \cos(t_1) = a \cos(t_2)$$

$$2) a \sin(t_1) = a \sin(t_2)$$

$$3) \frac{h t_1}{2\pi} = \frac{h t_2}{2\pi}$$

de 3) $\Rightarrow t_1 = t_2$ $\therefore$ no es inyectiva
 $\Rightarrow$ es simple

¿Cerrada?

X

hay que ver que $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$

$$\vec{r}'(0) = (a \cos(0), a \sin(0), \frac{h}{2\pi} 0)$$

$$= (a, 0, 0)$$

$$\vec{r}'(2\pi) = (a, 0, h)$$

Luego si $h \neq 0$ se tiene que no es cerrado

¿Cerrada simple?

X

No puede ser cerrado simple
pues no es cerrado

P2

En este curso lo más común es
parametrizar en ecuaciones paramétricas,
esto es que se obtenga algo de la
forma

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

$$z = h(t)$$

$$t \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$

Parametrizar una curva no es nada más que
buscar una forma de escribir los puntos
de la curva, es decir, encontrar

$$\vec{r}(t) = (x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$$

a)

$$y = x^2$$

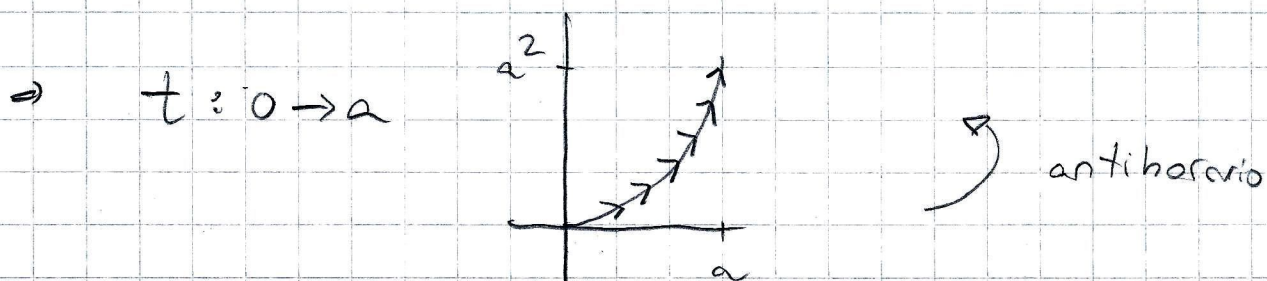
$\Rightarrow$ Como es una función $y = f(x)$
la típica parametrización es

$$x = t \Rightarrow y = f(t)$$

$$\text{Luego } \vec{r}(t) = (t, t^2) \quad t \in [0, a]$$

¿Será esto antehorario?

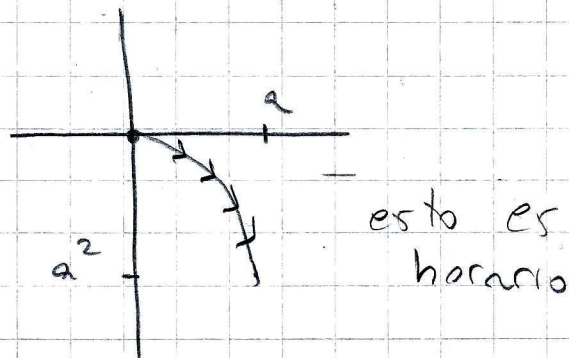
veamos! para ello debemos graficar y ver para
Donde avanzamos a medida que t crece



Por lo que, si es antihorario. $\square$

Obs: si hubiese sido $y = -x^2$ con

$$\vec{r}(t) = (t, -t^2)$$

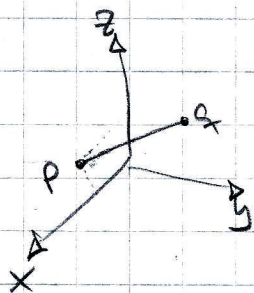


Una forma de obtener sentido
antihorario es empezar desde
el final de este sentido

$$\Rightarrow x = a - t \Rightarrow y = (a - t)^2$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (a - t, (a - t)^2) \quad \text{que si es antihorario}$$

b) segmento que une $p = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ y $q = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$



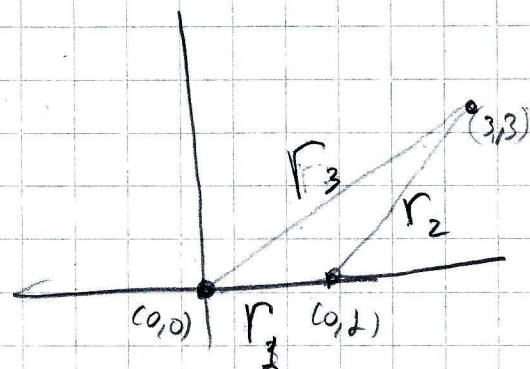
podemos empezar en p
e ir avanzando hasta q
según la dirección entre q y p

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{r}(t) &= p + t(\vec{pq}) \\ &= \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}) \\ &= \vec{p} + t\vec{q} - t\vec{p} \\ &= t\vec{q} + (1-t)\vec{p} \\ &= t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{con } t \in [0, 1] \\ \bullet \text{ si } t=0 \\ \Rightarrow \text{estoy en } p \\ \bullet \text{ si } t=1 \\ \Rightarrow \text{estoy en } q \end{array} \right\}$$

esto se conoce como
combinación convexa

□

c) el triángulo de vertices



Uniremos 3 curvas.

Los 3 segmentos que forman el triángulo

$$\begin{aligned} \Rightarrow r_1 &:= \left\{ \vec{r}_1(t) = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\} \\ r_2 &:= \left\{ \vec{r}_2(t) = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\} \\ r_3 &:= \left\{ \vec{r}_3(t) = t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\} \end{aligned}$$

Obs: Da lo mismo quien acompaña a t y a $1-t$ se pueden cambiar los ordenes

$$\Rightarrow \Gamma = r_1 \cup r_2 \cup r_3$$

d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

idea 1: Despejar $y = y(x)$
y hacer lo mismo que en (a)

idea 2: usar otro método!

si defino $x = 3 \cos(\theta)$, $y = 2 \sin(\theta)$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} &= \frac{(3\cos(\theta))^2}{9} + \frac{(2\sin(\theta))^2}{4} \\
 &= \frac{9\cos^2(\theta)}{9} + \frac{4\sin^2(\theta)}{4} \\
 &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \\
 &= 1 \quad \frac{11}{0}! \text{ Funciona!}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (3\cos(\theta), 2\sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi]$$

e) Intersección casquete esférico unitario con

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\Rightarrow \{ \overbrace{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1}^{(1)} \cap \{ \overbrace{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = z^2}^{(2)} \}$$

Usando la equivalencia en Coordenadas cartesianas de las cilíndricas

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = z_0$$

$$\Rightarrow (1) \quad x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow r^2 = z^2 \Rightarrow z = r$$

$$\text{en (2)} \quad \underbrace{x^2 + y^2}_{z^2} + z^2 = 1 \Rightarrow z^2 + z^2 = 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

Por simplicidad nos quedamos con los positivos

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \vec{r}(\theta) &= (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta), \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(\theta), \sin(\theta), 1)
 \end{aligned}$$

P3 en cilíndricas como (ρ, z, θ)

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = e^{-\theta} \quad \theta \in [0, \infty)$$

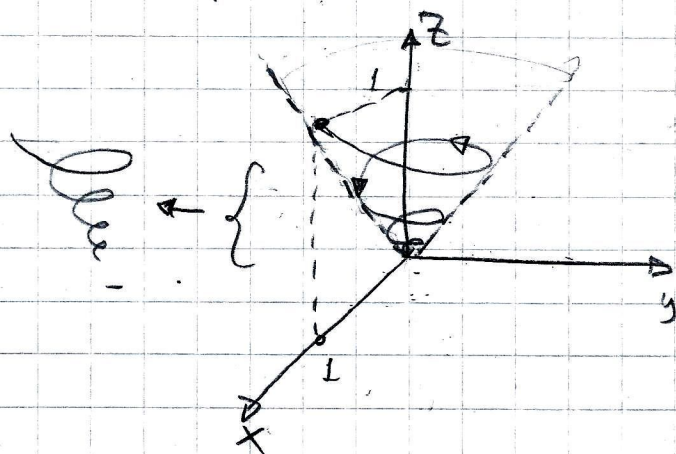
$$\begin{aligned}
 \Rightarrow x^2 + y^2 &= z^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\text{positivo pues } z = e^{-\theta} > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow e^{-\theta} &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \\
 &= \rho
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho = e^{-\theta}$$

$$\text{Luego } \vec{r}(\theta) = (e^{-\theta} \cos(\theta), e^{-\theta} \sin(\theta), e^{-\theta})$$

Para el dibujo basta notar la relación $x^2 + y^2 = z^2$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = (e^{-\theta})^2$ es decir es una especie de circunferencia
 que en cada punto varía su centro



si $\theta = 0 \Rightarrow e^{-0} = 1$
 $\theta \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\theta} \rightarrow 0$
 $e^{-\theta}$ es decreciente.
 $\Rightarrow e^{-\theta} \in [0, 1]$

$\Rightarrow \theta = 0 \rightarrow \vec{r}(0) = (1, 0, 1)$
 $\theta \rightarrow \infty \rightarrow \vec{r}(\infty) = (0, 0, 0)$

b)
$$S(\theta) = \int_0^{\theta_0} \left\| \frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta} \right\| d\theta \quad \} \text{ longitud de arco}$$

$$= \int_0^{\theta_0} \left\| -e^{\theta} (\cos(\theta), \sin(\theta), 1) + e^{-\theta} (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \right\| d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0} |e^{-\theta}| \cdot \left\| (-\cos(\theta) - \sin(\theta), -\sin(\theta) + \cos(\theta), 1) \right\| d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0} e^{-\theta} \sqrt{(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 + (\sin(\theta) - \cos(\theta))^2 + 1} d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0} e^{-\theta} \sqrt{1 + 2\sin(\theta)\cos(\theta) + 1 - 2\sin(\theta)\cos(\theta) + 1} d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0} e^{-\theta} \sqrt{3} d\theta$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S(\theta_0) &= \int_0^{\theta_0} e^{-\theta} \sqrt{3} d\theta \\
 &= \sqrt{3} (-e^{-\theta}) \Big|_0^{\theta_0} \\
 &= \sqrt{3} (1 - e^{-\theta_0})
 \end{aligned}$$

Ahora si $\theta_0 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S(\theta_0) \stackrel{\theta_0 \rightarrow \infty}{=} L(\Gamma) &= \sqrt{3} (1 - \cancel{e^{-\theta_0}})^0 \\
 &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

c) Para la parametrización natural ocuparemos la longitud de arco

$$S(\theta) = \sqrt{3} (1 - e^{-\theta})$$

Despejar θ

$$\Rightarrow \frac{S}{\sqrt{3}} = (1 - e^{-\theta})$$

$$\Rightarrow \frac{S}{\sqrt{3}} - 1 = -e^{-\theta} \Rightarrow 1 - \frac{S}{\sqrt{3}} = e^{-\theta} \quad / \ln()$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 - \frac{S}{\sqrt{3}}\right) = -\theta$$

Luego $\theta(s) = -\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right)$

Ahora debemos reemplazar esto en la parametrización $\vec{r}(\theta)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{\sigma}(s) &= \vec{r}(\theta(s)) = (e^{-\theta} \cos(\theta), e^{-\theta} \sin(\theta), e^{-\theta}) \\ &= e^{-\theta} (\cos(\theta), \sin(\theta), 1) \\ &= \left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right) \left(\cos\left(-\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), \sin\left(-\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), 1\right)\end{aligned}$$



0

P4 (1) $x^2 - y^2 = 1$, (2) $x \tanh(z) = y$

-a) usando $x = \cosh(t)$, $y = \sinh(t)$ (1) se satisface

en consecuencia $\tanh(z) = \frac{y}{x} = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \tanh(t)$

$\Rightarrow z = t$

Luego $\vec{r}(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ $t \in [0, 1]$ $\nearrow$ pues $z \in [0, 1]$

Ahora la longitud, calcule la función longitud de arco en un tiempo t

$$\begin{aligned}\Rightarrow S(t) &= \int_0^t \left\| \frac{d\vec{r}(x)}{dx} \right\| dx \\&= \int_0^t \left\| (\sinh(x), \cosh(x), 1) \right\| dx \\&= \int_0^t \sqrt{\sinh^2(x) + \cosh^2(x) + 1} dx \\&= \int_0^t \sqrt{2 \cosh^2(x)} dx \\&= \int_0^t \sqrt{2} |\cosh(x)| dx \quad \begin{array}{l} \text{para } x \in [0, 1] \\ \cosh(x) \geq 0 \end{array} \\&= \int_0^t \sqrt{2} \cosh(x) dx \\&= \sqrt{2} (\sinh(t) - \cancel{\sinh(0)}) \quad \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \sim \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 1 - 1 = 0 \end{array} \\&= \sqrt{2} \sinh(t)\end{aligned}$$

Luego la longitud de la curva es cuando $t=1$

$$\Rightarrow L(\Gamma) = \sqrt{2} \sinh(1)$$

b) la parametrización natural esta dada por el despeje de t en la longitud de arco

$$\rightarrow S = \sqrt{2} \sinh(t)$$

$$\rightarrow \frac{S}{\sqrt{2}} = \sinh(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\sinh^2(t)}{2} + 1 = \cosh^2(t)$$

$$\rightarrow t = \sinh^{-1}\left(\frac{S}{\sqrt{2}}\right)$$

Reemplazando en $\vec{r}(t)$

$$\vec{V}(s) = \vec{r}(t(s)) = \left(\sqrt{\frac{S^2}{2} + 1}, \frac{S}{\sqrt{2}}, \sinh^{-1}\left(\frac{S}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

c) • Tangente $T(t) = \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|}$ o bien $T(s) = \frac{d\vec{V}(s)}{ds}$

$$\Rightarrow T(t) = \frac{(\sinh(t), \cosh(t), 1)}{\sqrt{2} \cosh(t)} \quad \Leftrightarrow \quad T(s) = \left(\frac{S}{\sqrt{2}\sqrt{S^2+2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{S^2+2}} \right)$$

• Normal: usaremos $T(s)$

$$\rightarrow N(s) = \frac{\frac{dT(s)}{ds}}{\left\| \frac{dT(s)}{ds} \right\|} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{S^2+2}} \right)^3, 0, \frac{S}{(\sqrt{S^2+2})^3} \right)}{\frac{1}{S^2+2}}$$

Normal
propuesta