

MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Marcelo Navarro



Auxiliar 10: Aplicaciones de la Integral II

02 de noviembre de 2017

- Sea $f \in \mathcal{C}^1$, se tiene que la longitud de la curva f entre a y b , esta dada por la fórmula:

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$$

- Sea $f \in \mathcal{C}^1$, el área del manto generado por la rotación en torno al eje OX de f entre a y b es:

$$S_{OX}(f) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$$

- Área en coordenadas polares:**
Sea $\rho : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función integrable, con $\beta - \alpha \leq 2\pi$ y que define una curva en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$, entonces el área de la

región $R = \{(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) : \theta \in [\alpha, \beta], \rho \in [0, \rho(\theta)]\}$ está dada por:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\theta)^2 d\theta$$

- Centro de gravedad:** Sea R la región encerrada bajo el gráfico de una función no negativa e integrable. Es decir $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$

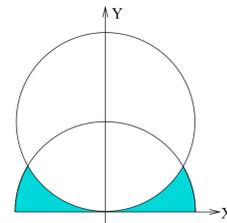
El centro de gravedad de R esta dado por

$$X_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad Y_G = \frac{\int_a^b \frac{f^2(x)}{2} dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

- P1.** a) Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2 + 2x - f(x)$. Determine $f(x)$.

Para $r > 0$ se define la región \mathcal{R} por:

- b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, x^2 + y^2 - 2ry \geq 0, y \geq 0\}$
 Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región \mathcal{R} en torno al eje OX .



- P2.** Dibuje las siguientes curvas considerando $r = r(\theta)$

- | | | | |
|-----------------------|------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| a) $r = 2$ | c) $\theta = \frac{\pi}{6}$ | e) $r = \tan(\theta)\sec(\theta)$ | g) $r = \text{sen}(2\theta)$ |
| b) $r^2 - r - 12 = 0$ | d) $r = \frac{\theta}{2\pi}$ | f) $r = 2\cos(\theta)$ | h) $r = 1 + 2\sin(\theta)$ |

- P3.** a) Calcule el area que encierra la curva $\rho(\theta) = \text{sen}(2\theta)$.
 b) Calcule el area encerrada entre las curvas $\rho_1(\theta) = \text{sen}(\theta)$ y $\rho_2(\theta) = 1 + \cos(\theta)$

- P4.** Se tiene una región fija de área A (generada a partir del área bajo la curva de una función f). Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OY y en torno al eje OX se calculan respectivamente como:

$$V_{OY} = 2\pi \cdot A \cdot X_G \quad \text{y} \quad V_{OX} = 2\pi \cdot A \cdot Y_G$$

Donde X_G y Y_G son las coordenadas del centro de masa de la región A