MA1002-1 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Jorge San Martín
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Guía Control 2

16 de octubre de 2017

P1. Calcule las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{\sin(3x)}{3+\cos(3x)}dx$

b) $\displaystyle\int e^{\cos(2x)}\cos^2(x)\sin(2x)dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\pi(\cos(x)+\sin(x))^2}{cos(x)}dx$

d) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos(3x)dx$

e) $\displaystyle\int \frac{8x}{x^2-1}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$

P2. Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,sen}(x)dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3+\sin(x)}dx$

P3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, una función integrable:

a) Si f es periódica de periodo p. Pruebe que para todo $a\in\mathbb{R}$:
$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)dx = \int_0^p f(x)dx$

b) Sea f una función impar y g función par. Hacer una aseveración general para estas dos integrales:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx \wedge \int_{-a}^{a} g(x)dx$$

c) Demuestre que si f es continua en $[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces existe un $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=0$.

P4. Sea f una función tal que $f(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$. Muestre que $f'''(x)=2f(x)$.

P5. Calcular el volumen de un toro de revolución, es decir el sólido obtenido por la rotación del círculo de radio r centrado en $(R,0)$ (donde $R>r$) en torno al eje OY .

P6. Dada la función:

$$f(x) = \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$$

Calcular:

$$\int_0^2 xf(x)dx$$

P7. Demuestre que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)}$$

Luego calcule el $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

P8. Considere las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ denidas en $[0, \pi]$.

a) Pruebe que $g(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0, \pi]$.
Indicación: Analizar mínimo de la función $h(x) = g(x) - f(x)$.

b) Calcular el área de la región encerrada por g y f.

c) Calcular el volumen de revolución de la región respecto al eje OY.

P9. Calcule el volumen del sólido generado por la revolución en torno al eje OX del área plana limitada por las curvas de ecuaciones:

$$x + y = 5 \wedge xy = 4$$

P10. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^{x^2} e^{t^2}dt}{1-cos(x)}$ *b*) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sin(\frac{i\pi}{2n})\frac{1}{n^2}$ *c*) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta}$

P11. Probar que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se verifica:

$$\int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})dt + \int_0^{\operatorname{sen}^2(x)} \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{t})dt = \frac{\pi}{4}$$

P12. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar, derivable en $\mathbb{R}$ y estrictamente creciente. Demuestre que la función:

$$g(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$$

Tiene un como punto mínimo global a $x = 0$ y es convexa en todo $\mathbb{R}$.

P13. Considere las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Calcule el área limitada por las funciones f y g, entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$. Calcule el volumen generado al rotar la región $\mathbb{R}$ en torno al eje OX y OY .

P14. Considere la función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ denida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1) \\ \\ g(x) & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$$

Con $g(x)$ una función decreciente en $[1,3]$ que cumple $g(1) = 2$ y $g(3) = 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, se pide:

a) Para la partición $P = \{0, 1-h, x :_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n\}$ donde $x_i = 1 + ih$; $i = \{0, ..., n\}$; y $h = \dfrac{2}{n}$. Calcule la suma inferior $s(f,P)$ y la suma superior $S(f,P)$.

b) Demuestre que:

$$S(f,P) - s(f,P) = h + \sum_{i=1}^{n} (g(x_{i-1}) - g(x_i))h.$$

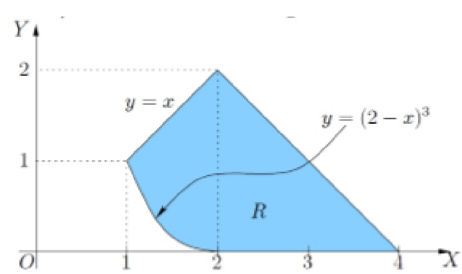
Calcule la sumatoria y deduzca que f cumple la condición de Riemann indicando para qué valores de h se cumple.

c) En el caso particular de $g(x) = 3 - x$, calcule explícitamente $s(f,P)$ en términos de n y pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,P) = 3$.

P15. Considere la región R de la figura:

a) Calcular el área de R.

b) Calcule el volumen del solido de revolución generado por rotar la región R en torno al eje OY.



P16. Calcule usando integrales el volumen de una piramide de base hexagonal (de apotema r) y altura h: (**Indicación:** Calcule una función $A(x)$ tal que $A(0) = 0$ y $A(h)$=Área hexagono de apotema r).