Pauta Auxiliar N° 10 Aplicaciones de la Integral I

Viernes 1 de Junio de 2012

P1.- (*P1 Examen Adicional 1-2011*) Sea A la región delimitada por las rectas

$$y = x, \quad y = ax, \quad y = 1 - ax, \quad a \geq 1$$

a) Calcule el área de A y el volumen del sólido R al rotar A en torno al eje X.
b) Calcule valores de a para las cuales el área de A es máxima.

Solución:
a) Sea $y_1 = x, \quad y_2 = ax, \quad y_3 = 1 - ax$, la intersección de y_2 e y_3 es $x = \frac{1}{2a}$, además la intersección de y_1 e y_3 es $x = \frac{1}{1+a}$. El área es:

$$A = \int_0^{\frac{1}{2a}} y_2 - y_1 dx + \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a+1}} y_3 - y_1 dx$$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2a}} ax - x dx + \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a+1}} 1 - ax - x dx$$

Después de un poco de álgebra:

$$A = \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{4a}$$

Para el volumen, las integrales son:

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2a}} y_2^2 - y_1^2 dx + \pi \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a+1}} y_3^2 - y_1^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2a}} a^2x^2 - x^2 dx + \pi \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a+1}} (1-ax)^2 - x^2 dx$$

$$V = \pi(a^2-1) \int_0^{\frac{1}{a+1}} x^2 dx + \pi \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{2a} \right) - a\pi \left(\frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{(2a)^2} \right)$$

$$V = \frac{\pi(a^2+2a-3)}{12a(a+1)^2}$$

b) De la parte anterior:

$$A(a) = \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{4a}$$

Derivando e igualando a 0, con la condición $a \geq 1$:

$$A'(a) = -\frac{1}{2(a+1)^2} + \frac{1}{4a^2} = 0 \Rightarrow a^* = \sqrt{2} + 1$$

Si $1 < a < a^* \Rightarrow A'(a) > 0$ y $a > a^* \Rightarrow A'(a) < 0$, luego a^* es mínimo.

P2.- (*P3 a) Control 3 2-2011*) Dadas las curvas $y = mx$, $x \geq 0$ y $y = x^{1/2}$, considere la región delimitada por ellas en el primer cuadrante y encuentre el valor de m para que los volúmenes generados por esta región, al girar en torno al eje OX y al eje OY, sean iguales.

Solución:
El punto de intersección es $x = 1/m^2$ al igualar ambas curvas:

$$V_{OX} = \pi \int_0^{\frac{1}{m^2}} (\sqrt{x})^2 - (mx)^2 dx = \frac{\pi}{6m^4}$$

$$V_{OY} = 2\pi \int_0^{\frac{1}{m^2}} x(\sqrt{x} - (mx))dx = \frac{2\pi}{15m^5}$$

Igualando $V_{OX} = V_{OY} \Rightarrow m = \frac{4}{5}$.

P3.- (*P1 b) Examen Adicional 2006*) Encuentre el valor de $\alpha \in (0,1)$ que maximiza el área de la región R encerrada entre la curva $y = x^\alpha$ el eje OY; la recta $x = 1$ y la recta tangente a la curva por $x = 1$. Verifique que el punto encontrado es realmente un punto de área máxima.

Solución:
Calculamos la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ es $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow y'(1) = \alpha$, la recta tangente es $y = \alpha(x-1)+1$, luego el área es:

$$A(\alpha) = \int_0^1 (1 + \alpha(x-1)) - x^\alpha dx = -\frac{1}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{2} + 1$$

Derivando e igualando a 0:

$$A'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha+1)^2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \alpha^* = \sqrt{2} - 1$$

$$A''(\alpha) = -\frac{2}{(\alpha+1)^3} < 0 \Rightarrow \alpha^* \text{ es máximo}$$

P4.- (*P2 Examen 1-2011*) Considere las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^\alpha$ $\alpha > 1$ y sea A la región (acotada) limitada por los gráficos de f y g.
a) Calcule los volúmenes de los sólidos obtenidos al rotar en torno a los ejes OX y OY.
b) Determine si existe tal que los volúmenes anteriores sean: iguales o uno el doble del otro.

Solución:
a) Los puntos de intersección son $x = 0$ y $x = 1$, los volúmenes son (recordar $x^\alpha \leq x$ si $\alpha \geq 1$):

$$V_{OX} = \pi \int_0^1 x^2 - x^{2\alpha} dx = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\alpha-1}{2\alpha+1}\right)$$

$$V_{OY} = 2\pi \int_0^1 x^2 - x^{\alpha+1} dx = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+2}\right)$$

b) Veamos si los volúmenes son iguales $V_{OX} = V_{OY} \Rightarrow \alpha = 1$ no puede ser puesto que $\alpha > 1$.
$V_{OX} = 2V_{OY} \Rightarrow \alpha$ no existe.
$2V_{OX} = V_{OY} \Rightarrow \alpha = 0$ no puede ser puesto que $\alpha > 1$

P5.- Demostrar que el área del arco parabólico es igual a $\frac{2}{3}$ del producto de la base b por la altura h. Calcule el volumen generado al rotar el arco parabólico en torno al eje OX en función de b y h.

Solución:
Para conseguir una parábola de base b y altura h, ésta debe pasar por $(\frac{-b}{2}, 0)$, $(\frac{b}{2}, 0)$ y por $(0, h)$, luego la parábola es: $y = -\frac{4h}{b^2}x^2 + h$. Luego el área viene dada por:

$$A = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (-\frac{4h}{b^2}x^2 + h)dx = 2\int_0^{\frac{b}{2}} (-\frac{4h}{b^2}x^2 + h)dx = \frac{2}{3}bh$$

Para el volúmen tenemos que calcular:

$$V = \pi \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (-\frac{4h}{b^2}x^2 + h)^2 dx = 2\pi \int_0^{\frac{b}{2}} (\frac{-4h}{b^2}x^2 + h)^2 dx = \frac{8}{15}\pi b h^2$$

P6.- Hallar el volumen del cuerpo formado por la rotación en torno a la recta $y = -1$, de la región acotada por $y = 4 - x^2$ e $y = 3$.

Solución:
Desplazando hacia arriba el problema, las curvas son $y_1 = 5 - x^2$ e $y_2 = 4$, las que se cortan en $x = 1$, aplicando simetría (factor 2)y la fórmula para calcular el volúmen tenemos:

$$V_x = 2\pi \int_0^1 y_1^2 - y_2^2 dx = 2\pi \int_0^1 (5 - x^2)^2 - 4^2 dx = \frac{176\pi}{15} \approx 36,86135$$

P7.- Calcular para que valor de $\lambda > 0$ la curva $y = \lambda \cos(x)$ divide en dos partes de igual área la región limitada por la curva $y = \text{sen}(x)$ y el eje de las abscisas cuando $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Solución:
Vemos primero que el área entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ de la función $\text{sen}(x)$ es:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Ahora sea a el punto de intersección entre $y_1 = \lambda \cos(x)$ y $y_2 = \text{sen}(x)$ luego

$$\tan(a) = \lambda$$

lo que implica que

$$\text{sen}(a) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \quad \cos(a) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

Luego:

$$\int_0^a \text{sen}(x) dx + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \lambda \cos(x) dx = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \cos(a) + \lambda(1 - \text{sen}(a)) = \frac{1}{2}$$

Dejando la ecuación en función λ se tiene:

$$2\sqrt{\lambda^2 + 1} = 2\lambda + 1$$

Lo que al resolver la ecuación:

$$\lambda = \frac{3}{4}$$

P8.- Considere la curva cuyos puntos (x, y) satisfacen:

$$(1 + x^2)y^2 = x^2(1 - x^2)$$

a) Calcule el área encerrada por la curva.
b) Calcule el volumen de revolución generado por la rotación de esta curva en torno al eje OX.

Solución:
a) El área está determinada por:

$$A = 2 \int_0^1 \frac{x\sqrt{1 - x^2} dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

ya que se ha utilizado la simetría de la curva. Para calcular esta integral se realizan dos cambios de variables, el primero es $u = x^2 \to du = 2xdx$ luego se multiplica y divide por $\sqrt{1 + u}$, y luego queda

$$A = \int_0^1 \frac{(1 - u)du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} - \int_0^1 \frac{udu}{\sqrt{1 - u^2}} = \left[\text{arc sen}\, u + \sqrt{1 - u^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

b) El volúmen está dado por:

$$V_{ox} = 2\pi \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)dx}{1+x^2} = 2\pi \int_0^1 \frac{(x^2+1)(2-x^2)-2dx}{1+x^2} = \pi\left(\frac{10}{3}-\pi\right)$$

cabe destacar que se hizo división de polinomios, luego para calcular esta integral se separa en dos, el factor 2 está incluido por simetría.

P9.- (*P2 Control 3 Verano 2010*)
a) Considere la curva en $\mathbb{R}^2$ llamada *Astroide* cuya ecuación es

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad a > 0$$

Calcule el volumen de revolución generado al rotar la rama de la Astroide del primer cuadrante en torno al eje OX.
b) Dadas las curvas $y = mx$ e $y = x^2$. Considere la región R limitada por ambas curvas para $x \geq 0$. Encuentre el valor de $m > 0$ tal que los volúmenes de los sólidos de revolución obtenidos al rotar R en torno al eje OX y OY sean iguales.

Solución:
a) Despejando y se tiene $f(x) = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ con $x \in [0, a]$, el volumen está dado por:

$$V_{OX} = \pi \int_0^a [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx$$

Hacemos el cambio de variables $u^3 = x \to 3u^2 du = dx$, $x = 0 \to u = 0$ y $x = a \to u = a^{1/3}$.

$$V_{OX} = \pi \int_0^{a^{1/3}} (a^{2/3} - u^2)^3 \cdot 3u^2 du$$

$$V_{OX} = 3\pi \int_0^{a^{1/3}} a^2u^2 - 3a^{2/3}u^4 + 3a^{2/3}u^6 - u^8 du$$

$$V_{OX} = 3\pi a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right) = \frac{16\pi a^3}{105}$$

b) Al igualar las curvas, obtenemos que se intersectan en $x = 0$ y $x = m$:

$$V_{OX} = \pi \int_0^m (mx)^2 - x^4 dx = \pi\left(\frac{m^5}{3} - \frac{m^5}{5}\right) = \frac{2\pi m^5}{15}$$

$$V_{OY} = 2\pi \int_0^m x(mx - x^2)dx = 2\pi\left(\frac{m^4}{3} - \frac{m^4}{4}\right) = \frac{\pi m^4}{6}$$

Igualando $V_{OX} = V_{OY} \Rightarrow m = \frac{5}{4}$

P10.-
a) Bosqueje la curva de ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ con $a > 0$, justificando debidamente (en particular indique dominio, intersección con los ejes, crecimiento, concavidades).
b) Calcule el área de la región R encerrada entre las curvas $C_1 : \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ y $C_2 : x + y = a$.
c) Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región R en torno al eje OX.

Solución:
a) Para la curva C_1: $Dom(C_1) = [0, a]$ $y_1 = a + x - 2\sqrt{ax}$,

$$y_1' = 1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} < 0 \quad \forall x \in [0, a]$$

Luego y_1 es decreciente

$$y'' = \frac{\sqrt{a}}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

Luego y_1 es convexa. La curva intersecta el eje X en el punto $(a, 0)$ y el eje Y en el punto (0,a). Para la curva C_2: $Dom(C_1) = [0, \infty)$ $y_2 = a - x$ es claro que y_2 es decreciente. La curva intersecta el eje X en el punto $(a, 0)$ y el eje Y en el punto (0,a).

b) El área es

$$A = \int_0^a a - x - (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx = \frac{a^2}{3}$$

c) El volumen es

$$V = \pi \int_0^a (a - x)^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{x})^4 dx = \frac{4\pi a^3}{15}$$

P11.- Hallar el volumen del sólido cuya base está acotada por el círculo $x^2 + y^2 = R^2$ con las secciones perpendiculares al eje X:
a) Cuadrados b) Triángulos Equiláteros c) Parábola de altura h d) Semicírculos e) Triángulos Rectángulos Isósceles.

Solución:
a) Como el cuadrado posee lado $2y$, su área es: $A = 4y^2$, integrando en función de x:

$$V_a = \int_{-R}^{R} 4y^2 dx = 8 \int_0^R R^2 - x^2 dx = \frac{16R^3}{3}$$

b) Como el triángulo equilátero posee lado $2y$, su área es: $A = y^2\sqrt{3}$, integrando en función de x:

$$V_b = \int_{-R}^{R} \sqrt{3}y^2 dx = 2\sqrt{3} \int_0^R R^2 - x^2 dx = \frac{4\sqrt{3}R^3}{3}$$

c) La parábola que pasa por $(-y, 0)$, $(y, 0)$ y $(0, h)$ en el plano yz es $z = -\frac{hx^2}{y^2} + h$, el área de la parábola es entonces:
$A = \int_{-y}^{y} z dy = \int_{-y}^{y} -\frac{hx^2}{y^2} + h dy = \frac{4yh}{3}$:
El volumen es:

$$V = \frac{4h}{3} \int_{-R}^{R} y dx = \frac{4h}{3} \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$V = \frac{8h}{3} \cdot \frac{\pi R^2}{4} = \frac{2hR^2}{3}$$

La última integral corresponde al área de un cuarto de círculo.
d) Como el semicírculo posee radio y, su área es: $A = \frac{\pi y^2}{2}$, integrando en función de x:

$$V_d = \int_{-R}^{R} \frac{\pi}{2} y^2 dx = \pi \int_0^R R^2 - x^2 dx = \frac{\pi R^3}{3}$$

e) Como el triángulo isósceles rectángulo de hipotenusa $2y$, su área es: $A = y^2$, integrando en función de x:

$$V_e = \int_{-R}^{R} y^2 dx = 2 \int_0^R R^2 - x^2 dx = \frac{4R^3}{3}$$

P12.- El sector $A(2\theta)$ de un círculo de radio r y centro $(0, a)$ se hace rotar en torno al eje OX generando un volúmen $V(2\theta)$.
a) Calcule $V(\theta)$ para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Probar que los ángulos para los cuales $V(\theta)$ es igual a la mitad del volumen del toro ($V_{toro} = 2\pi^2 r^2 a$) son las soluciones de la ecuación $\theta = f(\theta)$ donde $f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{2r}{3a}\sin(\theta)$.
c) Probar que $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, \frac{\pi}{2}]$ es contractante y deducir la existencia de un único θ solución de la ecuación $\theta = f(\theta)$ que es además el límite de la sucesión $\theta_0 = 0$, $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$.

Solución:
a) Es claro que $r < a$ puesto que debe existir una separación entre el origen del sector y el eje OX. Las funciones que se deben integrar son: $y_1 = \sqrt{r^2 - x^2} + a$ que es el arco e $y_2 = \cot(\theta)x + a$ que es el segmento recto. Luego el volúmen es (el factor 2 es por simetría):

$$V(\theta) = 2\pi \int_0^{r\sin(\theta)} (y_1^2 - y_2^2)dx$$

Reemplazando las funciones se tiene que:

$$V(\theta) = 2\pi \int_0^{r\sin(\theta)} r^2 - 2a\sqrt{r^2 - x^2} - 2a\cot(\theta)x - \mathrm{cosec}^2(\theta)x^2 dx$$

Calculando las integrales se obtiene:

$$V(\theta) = r^3\sin(\theta) + ar^2(\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)) - ar^2\sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{1}{3}r^3\sin(\theta)$$

Haciendo un poco de álgebra conseguimos que:

$$V(\theta) = 2\pi r^2(\frac{2}{3}r\sin(\theta) + a\theta) \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

b) Igualando la mitad del V_{toro} con $V(\theta)$ tenemos:

$$2\pi r^2(\frac{2}{3}r\sin(\theta) + a\theta) = \pi^2 r^2 a$$

y despejando θ se tiene:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{2r}{3a}\sin(\theta)$$

c) Como

$$|f'(\theta)| = \frac{2r}{3a}|\cos(\theta)| \leq 1 \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Luego f es contractante. Eso implica que la sucesión es de Cauchy luego convergente, por definición este límite es único. Así este límite necesariamente es la solución a la ecuación. Otra forma de verlo es definir $g(\theta) = \theta - f(\theta)$ que es continua, además $g(0)g(\frac{\pi}{2}) < 0$ por Bolzano $\exists$ un θ^* tal que $g(\theta^*) = 0$ y como g es estrictamente decreciente θ^* es único. Así $\theta^* = f(\theta^*)$.

P13.- *(Control 3 P3 2-2009)* El sólido de la figura, de base cuadrada, se construye de modo que cada plano paralelo a la base corta al sólido en una sección cuadrada cuyos vértices se apoyan en los arcos de circunferencia $\widehat{AV}, \widehat{BV}, \widehat{CV}, \widehat{DV}$. Cada arco corresponde a un cuadrante de circunferencia de radio R (Ver esquema). Calcule el volúmen del sólido $ABCDV$.

Solución:
En el corte según la diagonal AC del cuadrado base, se ven los arcos de cuartos de círcunferencia AV y CV . La ecuación del arco CV será $(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$. Además $A'C'$ es la diagonal del cuadrado de la figura y $A'C' = 2x$. Entonces, si a denota el lado del cuadrado, entonces $a\sqrt{2} = 2x \Rightarrow a = \sqrt{2}x$. Área Cuadrado $= a^2 = 2x^2$.
Por otra parte, de la ecuación del arco, se tiene que $x(y) = R - \sqrt{R^2 - (y - R)^2}$. Entonces el volumen pedido será:

$$V = \int_0^R A(y)dy$$

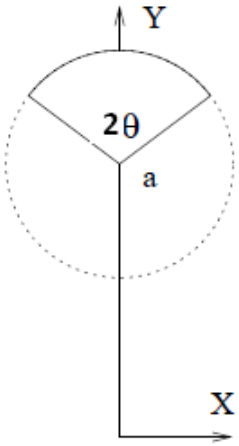

Figura 1: Problema 12

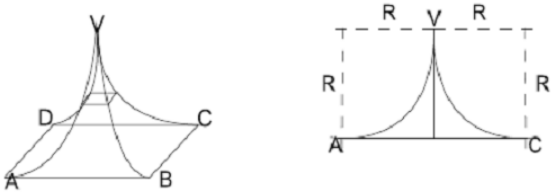

Figura 2: Problema 13

donde $A(y) = 2[x(y)]^2$. Sigue que:

$$V = 2\int_0^R (R - \sqrt{R^2 - (y-R)^2})^2 dy$$

$$V = 2\int_0^R R^2 - 2R\sqrt{R^2-(y-R)^2} + R^2 - (y-R)^2 dy$$

$$V = 2\int_0^R R^2 - 2R\sqrt{R^2-(y-R)^2} + R^2 - y^2 + 2yR - R^2 dy$$

$$V = 2\int_0^R R^2 - y^2 + 2yR dy - 4R\int_0^R \sqrt{R^2-(y-R)^2} dy$$

Sustitución $y - R = R\operatorname{sen} t$, $dy = R\cos t dt$, $y = 0 \Rightarrow t = -\pi/2, y = R \Rightarrow t = 0$

$$V = \frac{10R^3}{3} - 4R^3\int_{-\pi/2}^0 \cos^2(t) dt$$

$$V = \frac{10R^3}{3} - 2R^3\int_{-\pi/2}^0 1 + \cos(2t) dt = R^3\left(\frac{10}{3} - \pi\right)$$