

Aux 7

P1 a) Considere $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$\text{p.d.g: } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e} \right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e^{1/4}} \right)$$

Notemos que $f(x) = e^{-x^2}$ $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua
 $\Rightarrow$ es integrable y usando que $\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

$$s(f, P) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f \leq S(f, P)$$

$$\text{En particular } s(f, P) \leq \int_a^b f \leq S(f, P)$$

Por lo que debemos calcular $s(f, P)$ y $S(f, P)$
 Con $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\} \rightsquigarrow x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$

$$\hookrightarrow \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{2} \quad i = 1, 2$$

y notando que e^{-x^2} es decreciente

$$\Rightarrow M_i = e^{-x_{i-1}^2} \quad m_i = e^{-x_i^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S(f, P) &= \sum_{i=1}^2 m_i \Delta x_i = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 \\ &= e^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{2} + e^{-1} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y \quad S(f, P) &= \sum_{i=1}^2 M_i \Delta x_i = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{e} \right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} \right)$$

b) Calcule $\int_a^b e^x dx$ usando Partición equiespaciada

notemos que e^x en $[a, b]$ es continua

$\Rightarrow e^x$ es integrable según Riemann lo que significa que

$$\underbrace{\int_a^b e^x}_{(1)} = \underbrace{\int_a^b e^x}_{(2)} = \int_a^b e^x$$

Por lo que podemos calcular (1) & (2), calculemos (1) notando que

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \stackrel{\text{¿Por qué?}}{=} \sup_{P \in P_{[a,b]}} S(e^x, P)$$

usemos P equiespaciada en el intervalo $[a, b]$

$$\Rightarrow \Delta x_i = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$$

Recordemos que e^x es creciente

$$\Rightarrow m_i = \inf \{ e^t \} = e^{x_{i-1}}$$
$$t \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\Rightarrow \int_a^b e^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{(a + \frac{i-1}{n}(b-a))} \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^a \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^n e^{\left(\frac{i-1}{n}\right)(b-a)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^a \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} \left(e^{\left(\frac{b-a}{n}\right)}\right)^i$$

geom

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^a \left(\frac{b-a}{n}\right) \left[\frac{\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{(n-1)+1} - 1}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^a \left(\frac{b-a}{n}\right) \left[\frac{e^{\frac{b-a}{n}} - 1}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} \right]$$

reordenando

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^a (e^{\frac{b-a}{n}} - 1)$$

1

limite ultra conocido

$$\frac{e^{\frac{b-a}{n}} - 1}{\frac{b-a}{n}}$$
$$\frac{e^y - 1}{y}$$

$$= e^a (e^{b-a} - 1)$$

$$= e^b - e^a \quad \square$$

P2 Probar que f^2 es Riemann integrable si f es definida y acotada y Riemann integrable con $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$

En efecto, por las hipótesis debemos pensar en la condición de Riemann es decir
Tenemos que probar que

1) f^2 es definida y acotada en $[a, b]$

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}_{[a, b]} : S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$

Dem: 1) f^2 está bien definida pues f es definida en $[a, b]$ con lo que se tendrá que

$$\forall x \in [a, b] \quad (f(x))^2 = f(x) \cdot f(x) < +\infty$$

$\Rightarrow f^2$ es definida en $[a, b]$

↑
existe

↑
finito

Pero esto es obvio!

No del todo,

si en $x_0 \in [a, b]$

$f^2(x_0) \rightarrow +\infty$

no podríamos

seguir !!

• Además f^2 es acotada, pues f lo es y $(\cdot)^2$ es creciente

$\rightarrow$ Como f es acotado y positivo $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \leq f(x) \leq \beta$

$$\Rightarrow \alpha^2 \leq f(x) \leq \beta^2$$

En otras palabras y más precisamente

Se tiene que

$$0 \leq f^2(x) \leq \sup_{x \in [a,b]} \{f^2(x)\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{pues } f(x) \geq 0 \\ \text{y } (\cdot)^2 \text{ es creciente} \end{array} \right\}$$
$$= \left(\sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\} \right)^2 = P^2$$

Donde $P = \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$

Recordar esto!
Con el infimo pasa lo mismo!

2) Veamos ahora que $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

$$S(f^2, \mathcal{P}) - s(f^2, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

Tenemos que encontrar un $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$
para ello mediante el estudio de $S(f^2, P) - s(f^2, P)$

Considerando que f es integrable

$\Rightarrow$ Se tiene que $\forall \varepsilon > 0 \exists Q \in \mathcal{P}_{[a,b]} S(f, Q) - s(f, Q) < \varepsilon'$

entonces estudiemos $S(f^2, P) - s(f^2, P)$

$$\Rightarrow S(f^2, P) - s(f^2, P) = \sum_{i=1}^n [M_i(f^2) - m_i(f^2)] \Delta x_i$$
$$= \sum_{i=1}^n [(M_i(f))^2 - (m_i(f))^2] \Delta x_i$$

$$\Rightarrow S(f^2, P) - s(f^2, P) = \sum_{i=1}^n [(M_i(f))^2 - (m_i(f))^2] \Delta x_i$$

Recordar que

$$m_i(f) \leq M_i(f)$$

y que designamos

$$\text{Como } \beta = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$= \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f)) \Delta x_i \cdot \underbrace{(M_i(f) + m_i(f))}_{\leq \beta + \beta}$$

$$\leq [S(f, P) - s(f, P)] 2\beta$$

$$\Rightarrow m_i(f) \leq M_i(f) \leq \beta \quad = 2\beta [S(f, P) - s(f, P)]$$

$$\text{Luego si } S(f, P) - s(f, P) < \frac{\epsilon}{2\beta} = \epsilon'$$

se tiene que

$$S(f^2, P) - s(f^2, P) \leq 2\beta [S(f, P) - s(f, P)]$$

$$< 2\beta \cdot \frac{\epsilon}{2\beta}$$

$$= \epsilon$$

$\therefore f^2$ es riemann integrable pues basta considerar una partición $P_{2\beta}$ tal que

$$S(f, P) - s(f, P) < \frac{\epsilon}{2\beta}$$

P3 | Sea $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ continua, biyectiva y estrictamente creciente

a) Explicar por qué f y f^{-1} son integrables y por qué f^{-1} es estrictamente creciente

Resp: • f es continua en $[a, b] \Rightarrow$ es integrable, además, como f es continua y estrictamente monótona sobre un intervalo se tiene que f^{-1} es continua y por lo tanto integrable

• Para ver que f^{-1} es estrictamente creciente lo haremos por contradicción.

Supongamos que f^{-1} es decreciente

Sea $x, y \in [c, d] \Rightarrow x < y \Rightarrow f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y))$$

$$\Rightarrow x \geq y$$

$\Rightarrow \Leftarrow$

Luego f^{-1} es estrictamente creciente

b) Considere $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ partición de $[a, b]$ y
 $Q = \{f(x_0), \dots, f(x_n)\}$ partición de $[c, d]$

pdg $S(f, P) + s(f^{-1}, Q) = bd - ac$

Recordar que $S(g, P) = \sum_{i=1}^n M_i(g) \Delta x_i$ $M_i(g) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{g(x)\}$

y $s(g, P) = \sum_{i=1}^n m_i(g) \Delta x_i$ $m_i(g) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{g(x)\}$

$\Rightarrow$ Como f es creciente se tiene que

$$M_i(f) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\} = f(x_i)$$

$$\Rightarrow S(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_i) (x_i - x_{i-1})$$

Por otro lado, como f^{-1} es creciente

$$m_i(f^{-1}) = \inf_{t \in [f(x_{i-1}), f(x_i)]} \{f^{-1}(t)\} = f^{-1}(f(x_{i-1})) = x_{i-1}$$

$$\Rightarrow s(f^{-1}, Q) = \sum_{i=1}^n x_{i-1} (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

Luego $S(f, P) + s(f^{-1}, Q) = \sum_{i=1}^n f(x_i) (x_i - x_{i-1}) + x_{i-1} (f(x_i) - f(x_{i-1}))$

Desarrollando

$$S(f, P) + s(f^{-1}, Q) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) - \cancel{x_{i-1} f(x_i)} + \cancel{x_{i-1} f(x_i)} - x_{i-1} f(x_{i-1})$$

$$\text{Telescópica} \quad = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) - x_{i-1} f(x_{i-1})$$

$$= x_n f(x_n) - x_0 f(x_0)$$

$$= bd - ac$$



c) Concluya que $\int_c^d f^{-1} = bd - ac - \int_a^b f$

De (b) tenemos que

$$S(f, P) + s(f^{-1}, Q) = bd - ac \quad (*)$$

Como f y f^{-1} son continuas, y como P fue una partición arbitraria, podemos tomar el límite $\lim_{|P| \rightarrow 0}$ en $(*)$ y obtenemos que

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S(f, P) + \lim_{|P| \rightarrow 0} s(f^{-1}, Q) = bd - ac \quad \text{No depende de } P$$

$$\Rightarrow \int_a^b f + \int_c^d f^{-1} = bd - ac$$

$$\Rightarrow \int_c^d f^{-1} = bd - ac - \int_a^b f$$

Donde se usa que

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S(f^{-1}, Q) = \int_c^d f^{-1}$$

ya que $Q = \{f(x_0), \dots, f(x_n)\}$ luego si $|P| \rightarrow 0$

se tiene que $\max_{i \in [1, n]} (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0 \Rightarrow \forall i, x_i - x_{i-1} \rightarrow 0$

esto es que x_i y x_{i-1} están infinitesimalmente cerca luego como f es continua

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \rightarrow 0$$

$$\boxed{P4} a) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \dots + \frac{1}{(n+n)^3} \right)$$

Debemos identificar una suma de Riemann, en donde por lo general se tendrá algo de la forma

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

$$\text{con } \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

$$\text{y } f(x_i) = f\left(a + i \frac{(b-a)}{n}\right)$$

Es decir una suma
con partición equiespaciada

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \dots + \frac{1}{(n+n)^3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n \cdot n}{(n+k)^3} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^3}{(n+k)^3} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^3} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(x_i) & \Delta x_i \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x_i) = \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^3} \Rightarrow x_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right) = a + k \frac{(b-a)}{n}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad y \quad b-a = 1$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad y \quad b = 2$$

lo que verifica que $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^3} \cdot \frac{1}{n} &= \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = \int_1^2 x^{-3} dx = \left. \frac{x^{-2}}{-2} \right|_1^2 \\ &= \frac{2^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

b) probar que $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} &= \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}} \\
 &= \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}} \\
 &= \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}} \\
 &= \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{n}{n}\right)} \\
 &= \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)}
 \end{aligned}$$

Calculemos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)}$

Calculemos esto

pero hay una productoria, así que apliquemos $\ln$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x_i)$ Δx_i

$$\Rightarrow f(x_i) = \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right) \Rightarrow \underbrace{1 + \frac{i}{n}}_{= a + \frac{(b-a)i}{n}} = a + \frac{(b-a)i}{n}$$

$$\hookrightarrow f(x) = \ln(x)$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad \wedge \quad b - a = 2$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad \wedge \quad b = 2$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$$= \int_1^2 \ln(x) dx$$

$$= (x \ln(x) - x) \Big|_1^2$$

$$= 2 \ln(2) - 2 - (1 \ln(1) - 1)$$

$$= 2 \ln(2) - 1$$

luego el limite pedido es

$$e^{2\ln(2)} - 1$$



[PS] $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, no negativa en $[a, b]$

pdq $\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Por contradicción, Supongamos que $f(x) \neq 0$
para algun $x_0 \in [a, b]$, Como f es no negativa

se tiene que $f(x_0) > 0$, Como f es continua

debe existir una vecindad en torno a x_0 en donde
 f sea estrictamente positivo, esto es que

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ tq } f(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

Ademas Como f es continua en $[a, b]$ lo será
en $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \Rightarrow$ continua sobre un cerrado y
acotado $\Rightarrow$ alcanza minimo y maximo.

Sea m el minimo que alcanza f en $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

$$\Rightarrow f(x) \geq m > 0 \Rightarrow \overline{m} = \frac{m}{2} \text{ no es alcanzado por } f \text{ y } \frac{m}{2} < m$$

$$\Rightarrow f(x) > \overline{m} > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x) dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \bar{m} \\ &= \bar{m} (x_0 + \varepsilon - (x_0 - \varepsilon)) \\ &= \bar{m} 2\varepsilon \\ &> 0\end{aligned}$$

pero por otro lado

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \text{por hipotesis}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_a^b f(x) dx > 0 \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

$$\therefore f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$