MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 6: Primitivas

15 de Septiembre de 2017

- **[Primitiva]** Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $int(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si

$$\forall x \in int(I), \quad F'(x) = f(x)$$

Si F es una primitiva de f, entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$

- Es muy importante notar lo siguiente
  - $\int f'(x)dx = f(x) + c$
  - $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$
  - $\int f \pm g = \int f \pm \int g$
  - $\int(\lambda f) = \lambda(\int f)$
- **[Cambio de Variable]** si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

- **[Integración por Partes]** Sean u y v dos funciones de x, entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

o, equivalentemente $\int uv' = uv - \int u'v$

o, de manera compacta $\int udv = uv - \int vdu$

- **[Sustituciones trigonométricas]** Se recomiendan los siguientes cambios de variables
  - para $a^2 + x^2$, usar $x = atan(v)$ o $x = asenh(v)$
  - para $a^2 - x^2$, usar $x = asen(t)$ o $x = acos(t)$
  - para $x^2 - a^2$, usar $x = asec(v)$ o $x = acosh(v)$

obs: notar que da lo mismo si se escoge v o t

- **[Fracciones parciales]**: si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $gr(Q) > gr(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.
- Sea $R(cos(x), sen(x))$ una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $sen(x)$ y $cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = tan(x/2)$.

P1. Resuelva usando identidades trigonométricas.

a) $\int sin^4(x)dx$ *b)* $\int cos^5(x)dx$

P2. Resuelva usando cambio de variable.

a) $\int (x-1)\sqrt{x+4}dx$

b) $\int \frac{dx}{x - x^{\frac{3}{5}}}$

c) $\int \frac{sen(x)cos(x)}{\sqrt{1+sen(x)}}dx$

d) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx$

P3. Resuelva usando cambio de variable trigonométrico.

a) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$ *b)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ *c)* $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$

Propuesto: usando $u^2 = \frac{x+1}{x-1}$ calcule $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x^2}$

P4. Resuelva usando el cambio de variable $u = tan(\frac{x}{2})$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{sen(x)}{1+sen(x)}dx$

P5. Resuelva usando integración por partes

a) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$ *b)* $\displaystyle\int arctan(x)dx$ *c)* $\displaystyle\int cos(ln(x))dx$

Propuesto: Usando b) calcule una formula para la primitiva de f^{-1}

P6. Resuelva usando fracciones parciales

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$ *b)* $\displaystyle\int \frac{4x^3-3x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$

P7. [Recurrencias]

a) Sea $I_{p,q} = \displaystyle\int x^p(1+x)^q$ demuestre que $(p+1)I_{p,q} = x^{p+1}(1+x)^q - qI_{p+1,q-1}$

b) Encuentre una formula de recurrencia para

1) $J_n = \displaystyle\int x^n \operatorname{sen}(x)dx$ 2) $K_n = \displaystyle\int \cos(x)^n dx$

c) Conecte $J_{m,n} = \displaystyle\int cos^m(x)sin^n(x)dx$ con $J_{m.n-2}$

d) Sean $a, b \neq 0$. Calcule:

$$I = \int e^{ax}\sin(bx)\,dx \qquad J = \int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$

Hint: *Construya un sistema de ecuaciones con* I *y* J.

Primitivitas conocidas:

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall\alpha \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\displaystyle\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
4. $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
5. $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
7. $\displaystyle\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1-x^2} + C$
8. $\displaystyle\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$
9. $\displaystyle\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$
10. $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$
11. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2(x)\,dx = \operatorname{cotg}(x) + C$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$