P5. Encuentre un desarrollo limitado para $\varphi(x) = \sin(x) + \cos(x)$ en torno a $\bar{x} = 0$, cuyo error máximo de aproximación en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, sea inferior a 10^{-3} .

Solo dicen que encontremos un desarrollo de Taylor (pueden haber más) que cumpla lo pedido.

Siempre que hablen de error deben pensar en la fórmula de Taylor (está en el resumen).

Fórmula de Taylor:

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $(k + 1)$ -veces derivable en (a, b) y sea $T_f^k(\cdot)$ su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces para todo $x > \bar{x}$ (resp $x < \bar{x}$), existe $\xi \in (\bar{x}, x)$ (resp $\xi \in (x, \bar{x})$), tal que:

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot (x - \bar{x})^{k+1}.$$

En este caso $\bar{x} = 0$, $(a, b) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, entonces el módulo del error (E) es:

$$|E| = \left| \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot x^{k+1} \right|. \text{ Se desea que } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow |x| \leq \frac{\pi}{2} \leq 2 \text{ y } |f^{(k+1)}(\xi)| \leq 2, \forall k \geq 0$$

$$\Rightarrow |E| \leq \left| \frac{2}{(k+1)!} \cdot 2^{k+1} \right| \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{2^{k+2}}{(k+1)!} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 10^3 \cdot 2^{k+2} \leq (k+1)!, \text{ lo cual se cumple para}$$

$k = 9$ (comprobarlo, aunque también sirve cualquier $k \geq 9$)

Por lo tanto el desarrollo limitado debe ser de orden 9.