

Aux #5

P1

Analizar $f(x) = (1+x)e^{\frac{1}{x}}$

a) Dominio, paridad, signos y ceros

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pues $\frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$

- Paridad: recuerda f es par $\Leftrightarrow \forall x \in \text{Dom}(f) \quad f(x) = f(-x)$
 f es impar $\Leftrightarrow \forall x \in \text{Dom}(f) \quad -f(x) = f(-x)$

Evaluemos, $f(-x) = (1-x)e^{\frac{1}{-x}}$

$$= (1-x)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= (1-x)\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{x}} \neq f(x)$$

$$\neq -f(x)$$

Luego no es par ni impar

• Signos: recuerda encontrar donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$

$$\Rightarrow f(x) = (1+x)e^{\frac{1}{x}}; e^{\frac{1}{x}} > 0 \text{ siempre}$$

Luego el signo solo dependerá de $(1+x)$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \text{cuando} \quad 1+x > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$\text{y } f(x) < 0 \quad \text{"} \quad 1+x < 0 \Rightarrow x < -1$$

Luego $f(x) > 0$ con $x \in \text{Dom}(f) \cap (-1, \infty) = (-1, \infty) \setminus \{0\}$

$f(x) < 0$ con $x \in \text{Dom}(f) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -1)$

• Ceros: recuerda, $\bar{x}$ es cero de f si $f(\bar{x}) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\Rightarrow (1+x) = 0 \quad \vee \quad \underbrace{e^{\frac{1}{x}} = 0}_{\text{Nunca ocurre}}$$

$$\Rightarrow x = -1$$

b) Límites laterales en 0

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right) e^y$$

$\nearrow \infty$
 $\searrow 1$

Cambio de
Variable

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$$

$$= 1 \cdot 0$$

$$= 0$$

Como $0 \neq \infty$ f no puede ser reparable
y no es continua

Asintotas:

↳ Vertical: vimos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ Luego $x=0$ es asintota

↳ Horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x) e^{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $\infty \quad 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x) e^{\frac{1}{x}} \rightarrow -\infty$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $-\infty \quad 1$

$\Rightarrow$ no hay asintota horizontal (pues debe ser un número y no ∞)

↳ Oblicua: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x) e^{\frac{1}{x}}}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1 = m$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)e^{\frac{1}{x}} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + e^{\frac{1}{x}}$$

(9)

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow = \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + e^{\frac{1}{x}} \\
 y = \frac{1}{x} &\quad = \lim_{y \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_{\text{conocido}} + e^y \\
 &= 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ hacia $+\infty$ tengo la asíntota $y = x + 2$

Veamos ahora hacia $-\infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1+x)e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad \text{identico al anterior} \\
 &= 1 = m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((1+x)e^{\frac{1}{x}} - x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) + e^{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} + e^y = 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

(5)

$\Rightarrow$ hacia $-\infty$ tengo la asíntota $y = x + 2$

a. A. vertical: $x = 0$

A. oblicua hacia $+\infty$ y $-\infty$: $y = x + 2$

No hay horizontal

d) Crecimiento y concavidad

• Crecimiento $\rightarrow$ estudiar signos de f'

$$\Rightarrow f'(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}} \\ = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}(1+x)}{x^2}$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{(1+x)}{x^2} \right)$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2} \right)$$

Ahora como $e^{\frac{1}{x}}$ y x^2 son positivos
el signo se dependerá de

$$x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 > 0$$

$\Rightarrow$ pto críticos de la inecuación:
 $\hookrightarrow$ recordo: pto crítico es cuando numerador o denominador se hace 0

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{ptos críticos } x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

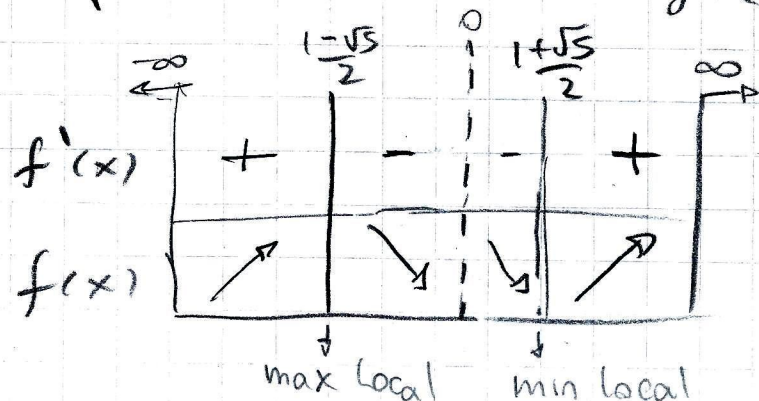
$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = \left(x - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right) \left(x - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	∞
$x - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$	-	-	+	
$x - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$	-	+	+	
	+	-	+	

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 > 0 \quad \text{si } x \in (-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \infty)$$

$$x^2 - x - 1 < 0 \quad \text{si } x \in \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

⇒ podemos hacer el sgte cuadro



} Nota ↗ es creciente
↘ es decreciente

para $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creciente

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreciente

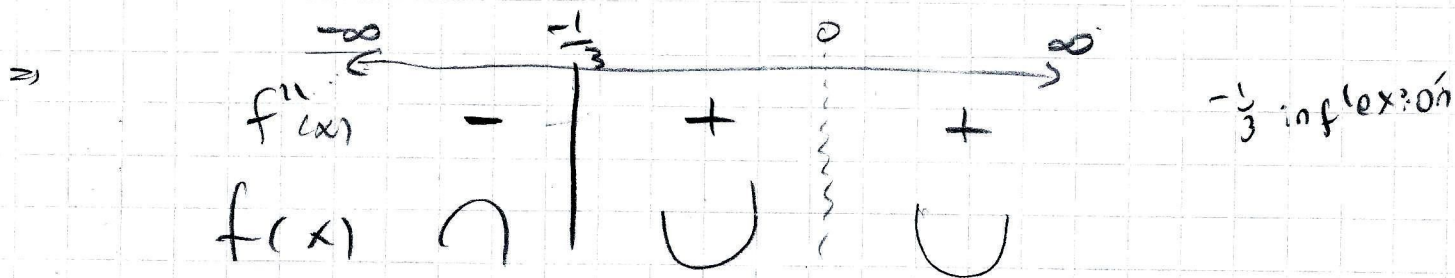
Concavidad: (Signos de f'')

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^4} (1+3x)$$

Como $e^{1/x} > 0$ y $x^4 > 0$ Analizo $(1+3x)$

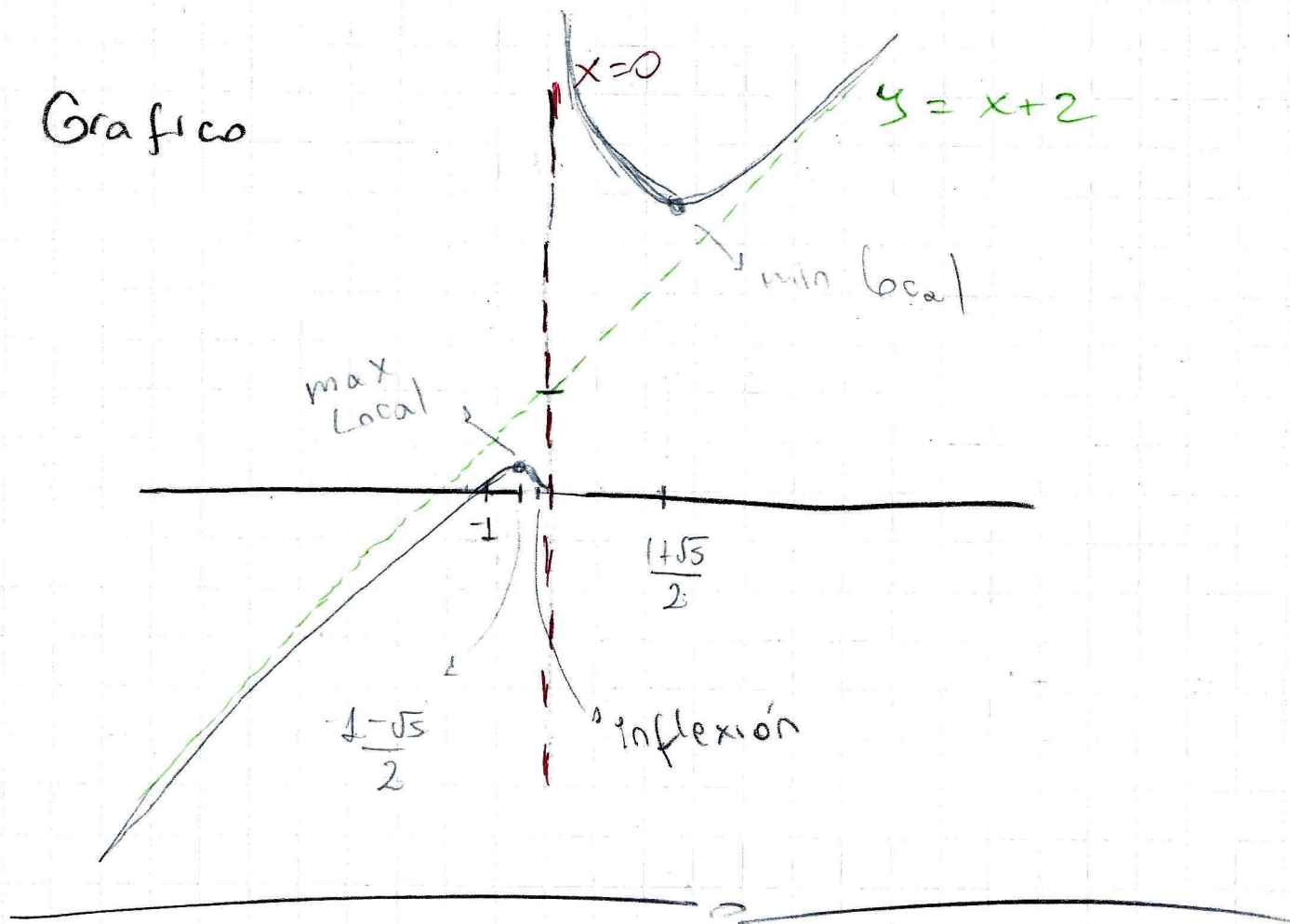
⇒ $f''(x) > 0$ si $x > -\frac{1}{3} \Rightarrow f$ convexa

y $f''(x) < 0$ si $x < -\frac{1}{3} \Rightarrow f$ concava



⑧

Grafico



P2 Estudiar crecimiento de $x^{\frac{1}{x}}$ en $(0, \infty)$
y determinar el valor máximo de $\sqrt[n]{n}$

$$\Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad \text{derivada Logarítmica}$$

$$\Rightarrow y = x^{\frac{1}{x}} \quad / \ln$$

$$\Rightarrow \ln(y) = \frac{1}{x} \ln(x) \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \ln(x) + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = y \left(\frac{1}{x^2} (1 - \ln(x)) \right)$$

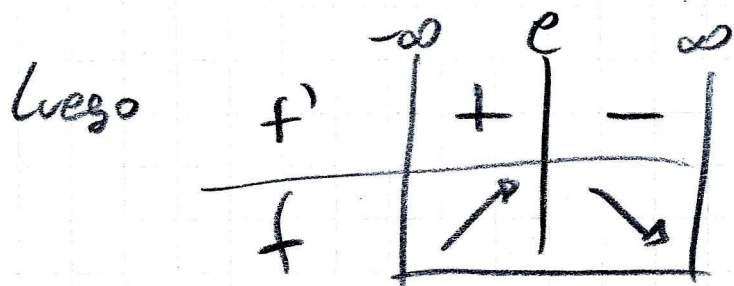
$$= \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} (1 - \ln(x)) = f'(x)$$

$$\text{Luego } f'(x) \geq 0 \quad \text{si} \quad 1 - \ln(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ creciente}$$

$$\text{y } f'(x) \leq 0 \quad \text{si} \quad 1 - \ln(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ decreciente}$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \text{si} \quad 1 \geq \ln(x) \Leftrightarrow e \geq x$$

$$\text{y } f'(x) \leq 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq \ln(x) \Leftrightarrow e \leq x$$



entonces f tiene un máximo local en $x=e$

y este es global pues f crece hasta e

y luego decrece en adelante (verifique que f es
concava en todo (e, ∞))

$\Rightarrow f$ alcanza su máximo en $x=e$

Luego la sucesión $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ debe alcanzar

su máximo valor en n cercano a e

Como $2 < e < 3$

dos posibilidades

$$\left. \begin{aligned} (\sqrt[n]{n})|_{n=2} &= \sqrt[2]{2} \\ (\sqrt[n]{n})|_{n=3} &= \sqrt[3]{3} \end{aligned} \right\} \text{ ¿cual es mayor?}$$

notemos que

$$8 = 2^3 < 3^2 = 9$$

$$\Rightarrow 2^3 < 3^2 \quad / \sqrt{}$$

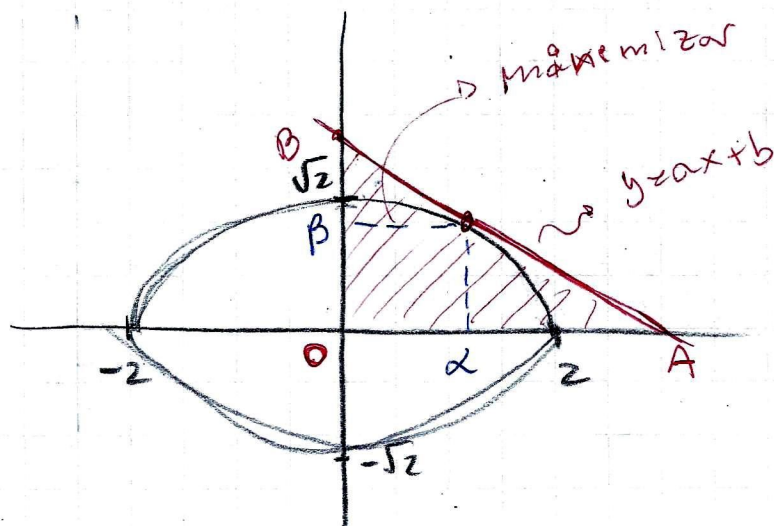
$$\Rightarrow 2^{3/2} < 3 \quad / \sqrt[3]{}$$

$$\Rightarrow 2^{1/2} < 3^{1/3}$$

Luego en $n=3$ se alcanza el máximo de

$$S_n = \sqrt[n]{n}$$

P3 el lugar geometrico es una parabola



$$x^2 + 2y^2 = 4$$

Saqueemos la recta tangente en (α, β) con $\alpha, \beta > 0$

$$\Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4 \quad / \quad \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow 2x + 2 \cdot 2y y' = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2x}{4y} \quad \text{en } x = \alpha \quad y = \beta$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-\alpha}{2\beta}$$

Luego la recta tangente es

$$y - \beta = \frac{-\alpha}{2\beta} (x - \alpha)$$

Ahora notando que el triángulo que se forma es rectángulo, solo necesitamos el valor de sus catetos para encontrar el área, es decir necesitamos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

$\overline{OA}$:= la altura es 0 $\Rightarrow y_A = 0$, y el punto A está en la recta

$$\Rightarrow -\beta = \frac{-\alpha}{2\beta} (x_A - \alpha) \quad \text{despejamos } x_A$$

$$\Rightarrow -2\beta^2 = -\alpha (x_A - \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{2\beta^2}{\alpha} + \alpha = x_A$$

$$\Rightarrow x_A^2 = \frac{\alpha^2 + 2\beta^2}{\alpha} \quad \text{Como } (\alpha, \beta) \in \text{ELipse}$$
$$\alpha^2 + 2\beta^2 = 4$$

$$\Rightarrow x_A = \frac{4}{\alpha} \Rightarrow A = \left(\frac{4}{\alpha}, 0 \right)$$

IDEM para $\overline{OB} := x_B = 0$

$$\Rightarrow y_B - \beta = \frac{-\alpha}{2\beta} (-\alpha)$$

$$\Rightarrow y_B - \beta = \frac{\alpha^2}{2\beta}$$

$$\Rightarrow y_B = \frac{\alpha^2}{2\beta} + \beta = \frac{\alpha^2 + 2\beta^2}{2\beta} = \frac{4}{2\beta} = \frac{2}{\beta}$$

$$\Rightarrow B = (0, \frac{2}{\beta})$$

$$\Rightarrow \text{Area } \Delta(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \text{Area } \Delta(\alpha, \beta) = \frac{4}{\alpha\beta}$$

queremos que
seja de L
Variable

$$\Rightarrow (\alpha, \beta) \in \text{Elipse} \Rightarrow \alpha^2 + 2\beta^2 = 4$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{4 - 2\beta^2} > 0$$

(B)

$$\Rightarrow \text{Area}(\beta) = \frac{4}{\beta \sqrt{4-2\beta^2}}$$

$$\text{con } \beta \neq 0$$

$$\text{y } \beta \in (0, \sqrt{2})$$

Derivemos para ver el mínimo

$$\text{Area}'(\beta) = \frac{0 - 4 \left(\sqrt{4-2\beta^2} + \beta \cdot \frac{(-4\beta)}{2\sqrt{4-2\beta^2}} \right)}{\beta^2 (4-2\beta^2)}$$

$$= \frac{-4(4-2\beta^2 - 2\beta^2)}{\beta^2 (4-2\beta^2)^{3/2}}$$

factorizo

$$= \frac{-16(1-\beta^2)}{\beta^2 (4-2\beta^2)^{3/2}}$$

$$\text{Luego } \text{Area}'(\beta) = 0 \text{ si } \beta = \pm 1$$

$$\text{Como estamos en } \alpha, \beta > 0 \Rightarrow \beta = 1$$

Veamos que es mínimo viendo los signos de Area'

$$\text{Area}'(\beta) = \frac{-16(1-\beta^2)}{\beta^2(4-2\beta^2)\sqrt{4-2\beta^2}}$$

Notando que $\beta^2 > 0$, $\sqrt{4-2\beta^2} > 0$

$$\text{y } 0 < \beta < \sqrt{2} \Rightarrow 0 < \beta^2 < 2 \quad | :2$$

$$\Rightarrow 0 < 2\beta^2 < 4$$

$$\Rightarrow 4 - \beta^2 > 0$$

Luego el signo de $\text{Area}'(\beta)$ depende de

$$-16(1-\beta^2) = -16(1-\beta)(1+\beta)$$

	0	1	$\sqrt{2}$
-16	-	-	-
$1+\beta$	+	+	+
$1-\beta$	+	-	-

↓
minimo local

$\Rightarrow \beta = 1$ es minimo local

→ Como $(\alpha, \beta) \in \text{Elipse}$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2\beta^2 = 4$$

$$\text{Si } \beta = 1 \Rightarrow \alpha^2 + 2 = 4$$

$$\alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$$

Luego la recta que forma el Δ de menor
area es

$$y - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2})$$

y el area minima es

$$\text{Area}_{\text{minima}} = \frac{4}{\alpha \beta}$$

$$\text{con } \alpha = \sqrt{2} \quad \beta = 1$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} \quad \square$$

$$\boxed{P4} \quad f(x) = \text{Senh}(x) \rightarrow f(0) = \text{Senh}(0) = 0$$

$$f'(x) = \text{Cosh}(x) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \text{Senh}(x) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \text{Cosh}(x) \Rightarrow f'''(0) = 1$$

$$\rightarrow f^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{senh}(x) & n \text{ par} \\ \text{cosh}(x) & n \text{ impar} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ por Taylor

$$\text{Senh}(x) = x + 0 + \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$+ \frac{f^{(2k)}(\xi) x^{2k}}{2k!}$$

$$, \quad \xi \in (0, x)$$

↑
queremos
aproximar

$$x = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ Como $f^{(2k)}(x) = \sinh(x)$

$$\Rightarrow \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{\sinh(\xi) x^{2n}}{(2n)!}$$

Con $\xi \in (0, x)$

b) aproximamos $\sinh(1)$ con Taylor de orden 5

$$\Rightarrow \sinh(1) \approx 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}$$

y el error es

$$\frac{\sinh(\xi) 1^6}{6!} = \frac{\sinh(\xi)}{720}$$

Con $\xi \in (0, 1)$

$$\Rightarrow \frac{\sinh(\xi)}{720} = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2 \cdot 720}$$

Varias formas de acotar!

Forma 1:

$$\frac{\sinh(\xi)}{720} = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2 \cdot 720} = \frac{e^{\xi} - \frac{1}{e^{\xi}}}{2 \cdot 720}$$

$$= \frac{e^{2\xi} - 1}{2e^{\xi} \cdot 720}$$

como $\xi \in (0, 1)$
 $\Rightarrow e^{\xi} > 1$

$$\leq \frac{e^{2\xi} - 1}{2 \cdot 720}$$

si $\xi \rightarrow 1$
 $e^{2\xi} \rightarrow e^2$

$$\leq \frac{e^2 - 1}{2 \cdot 720} \quad \left. \vphantom{\frac{e^2 - 1}{2 \cdot 720}} \right) e < 3$$

$$< 3^2 - 1$$

$$= \frac{8}{2 \cdot 720}$$

$\rightarrow$ cota para
el error

Forma 2, (como lo hicimos en clases)

$$\frac{e^{\frac{1}{e}} - e^{-\frac{1}{e}}}{2.720} \quad \left(\frac{1}{e} \rightarrow 1\right)$$

$\leq$

$$\frac{e - \frac{1}{e}}{2.720}$$

$(e < 3)$

$\leq$

$$\frac{3 - \frac{1}{3}}{2.720}$$

Ⓚ

_____ > _____