MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 5: Aplicaciones de derivadas II

07 de Septiembre de 2017

P1. Analizar completamente la función $f(x) = (1+x)e^{\frac{1}{x}}$ incluyendo:

a) Dominio, paridad, signos y ceros

b) Determine limites laterales en $x = 0$ y continuidad ¿Es reparable?

c) Determine asíntotas

d) Estudie crecimiento y concavidad

e) Dibuje el gráfico indicando puntos importantes

P2. **[1998 - P3-b) - C4]** Estudiar el crecimiento de la función definida en $(0, \infty)$ por $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, determinar el valor máximo alcanzado por la sucesión $\sqrt[n]{n}$

P3. Encuentre la ecuación de la recta tangente al lugar geométrico $x^2+2y^2 = 4$, tal que ella forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo de menor área posible. Calcule el área mínima (considere $x, y > 0$)

P4. *a)* Desarrolle mediante un polinomio de Taylor con resto, en torno a $x_0 = 0$, la función $senh(x)$

b) Calcule $senh(1)$ con términos no nulos del desarrollo anterior y estime una cota del error (puede usar $2,5 < e < 3$)

P5. Sea una función de clase C^n definida en un intervalo que contiene al punto x_0 que satisface:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{[n-1]} = 0, \qquad f^{[n]}(x_0) \neq 0$$

Sea g la función $g(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$

a) Defina $g(x)$ en x_0 para que sea continua en ese punto.

b) Calcule $g'(x_0)$
Hint: Use Taylor

Propuestos

P6. Estudiar completamente la función $f(x) = \frac{x}{ln(x^2)}$

P7. Encuentre un desarrollo limitado para $\varphi(x) = sen(x) + cos(x)$ en torno a $\overline{x} = 0$, cuyo error máximo de aproximación en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sea inferior a 10^{-3}

P8. **[2001 - C4]** A partir del desarrollo de Taylor en torno a 0 de $(x+a)^n$, con $n \geq 1$ un entero, demuestre la fórmula del binomio de newton $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} x^k$

- **[Convexidad]** Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice convexa si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, vale decir. $\forall x, y \in [a, b], x < y$ se tiene que

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x), \quad \forall z \in (x, y)$$

o equivalentemente

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

- Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y sólo si f' es creciente en (a, b). En el caso de que f' sea diferenciable, notamos que f sera convexa si $f'' \geq 0$.
- **[Concavidad]** f se dirá cóncava si $-f$ es convexa. Por lo tanto, en el caso de que f sea diferenciable se estudiará si f' es decreciente
- **[Derivadas de Orden Superior]**
Se define recursivamente (o inductivamente) las derivadas de orden superior por:

$$f^{[k]}(x) := (f^{[k-1]})'(x) \quad \text{y} \quad f^{[0]} = f(x)$$

Notar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admite una derivada de orden k en todo punto de (a, b), entonces $f^{[k-1]}, f^{[k-2]}, \ldots, f'', f', f$ existen y son continuas en (a, b)

- **[Clases C^k]** Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es de clase $C^k(a, b)$ si es $k-$veces derivable en todo (a, b) y la función $f^{[k]} : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua. Es decir, en la practica $f \in C^k(a, b) \iff f$es k-veces derivable y la derivada k-esima es continua.

Si lo anterior es cierto para todo $k \in \mathbb{N}$ diremos que f es de clase C^∞

- **[Desarrollo limitado]** Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ posee un desarrollo limitado, que no es más que una aproximación polinomial, de orden k en torno al punto $\overline{x} \in (a, b)$ si existen constantes $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - \overline{x}) + \cdots + +a_k(x - \overline{x})^k + o((x - \overline{x})^k)$$

Donde $o(\cdot)$ es un error de aproximación y es tal que $\lim_{u \to 0} \frac{o(u^k)}{u^k} = 0$.
Usando el cambio de variables $h = x - \overline{x}$, el desarrollo limitado queda

$$f(\overline{x} + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_k h^k + o(h^k)$$

- Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ k-veces derivable en $\overline{x} \in (a, b)$, y sea

$$T_f^k(h) := f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{f''(\overline{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f[k](\overline{x})}{k!}h^k$$

Su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\overline{x}$. Entonces

$$f(x) = T_f^k(h) + o((x - \overline{x})^k)$$

con $\lim_{h \to 0} \frac{o(h^k)}{h^k} = 0$

- **[Punto critico]** Diremos que x_* es punto critico de una función diferenciable f si se cumple que $f'(x_*) = 0$.
- Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en $\overline{x} \in (a, b)$, con $f'(\overline{x}) = \cdots = f^{[k-1]}(\overline{x}) = 0$ y $f^{[k]} \neq 0$, $k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:
  1. Si k es par y $f^{[k]}(\overline{x}) > 0$, entonces $\overline{x}$ es un minimo local
  2. Si k es par y $f^{[k]}(\overline{x}) < 0$, entonces $\overline{x}$ es un maximo local
  3. Si k es impar, $\overline{x}$ es un punto de inflexión, es decir, es un punto en donde la función cambia su concavidad
- Sea $x_0 \in (a, b)$ y $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función de C^2. Si $f'(x_0) = 0$, existen 3 posibilidades:
  1. $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es mínimo local.
  2. $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es máximo local.
  3. $f'''(x_0) \neq 0$ se puede concluir que x_0 es un punto de inflexión.)
- **[Asíntotas]** 3 tipos (estudiar independiente hacia $+\infty$ o $-\infty$)
  1. Horizontal: $y = c$, calcular $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$.
  2. Vertical: $x = a$, encontrar a tal que $\lim_{x \to a} f(x) \to \pm\infty$. Por lo general son las indeterminaciones.
  3. Oblicuas: $y = mx + n$, donde $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$
- **[Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor]**
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a, b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de taylor de orden k en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \overline{x}$ (respectivamente $x < \overline{x}$) existe $\xi \in (\overline{x}, x)$ (respectivamente $\xi \in (x, \overline{x})$ tal que:

$$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - \overline{x})^{k+1}$$

Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$