MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Guia Control 1

P1. ($\star$) Usando la caracterización $\varepsilon - \delta$ demuestre que

a) $f(x) = \begin{cases} xsen(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua en 0.

b) $g(x) = x^3$ es continua en $\overline{x} \in \mathbb{R}$

c) $h(x) = \sqrt{x}$ es continua en $a \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = x^2 + 5$ es continua en $x = 3$

P2. Pruebe que $f(x) = \lfloor x \rfloor$ no es continua en $\mathbb{Z}$

P3. ($\star$) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x+a} & \text{si } x < a \\ 2x - e^{x-a} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

a) Calcule los límites laterales cuando $x \to a^{\pm}$ en términos de a y pruebe que f es continua si y sólo si $a = 1$

b) A partir de ahora considere $a = 1$. Establezca el dominio de f y el conjunto de puntos de los cuales es continua

c) Pruebe que f es anula en algún punto de $[1, \infty)$

P4. Demuestre que si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva entonces es estrictamente monótona

P5. ($\star$) Sea la función $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{sen(x)} & \text{si } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ c & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Se pide determinar el valor de c de modo que f sea continua $x = 0$

b) Usando la definición de derivada, calcule $f'(0)$

P6. ($\star$) Muestre que la ecuación $x^5 + 4x = 1$ tiene solución en $\mathbb{R}$ y luego mediante dos formas distintas pruebe que esta solución es única. (hint: puede usar crecimiento, tvm, contradicción, etc)

P7. Muestre que $f(x) = x^5 + 10x + 3$ tiene una única raíz real.

P8. Probar que $\frac{5}{x-1} + \frac{7}{x-2} + \frac{16}{x-3} = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2 y otra entre 2 y 3

P9. Demuestre que la ecuación $sen(x) + cos(x) = x^2 - x$ tiene solución en el intervalo $[0, \pi]$

P10. Demuestre que existe un único $x_0 \in (1,2)$ que es solución de la ecuación

$$\sqrt[5]{x-1} + \sqrt{x-1} = \frac{3}{x(x-1)}$$

P11. Demuestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ y su derivada es acotada en $\mathbb{R}$ entonces f es continua uniforme.

P12. ($\star$) Demuestre que $f(x) = \frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $D = (0, \infty)$ pero si lo es en $D_{\geq 0} = (a, \infty)$ para $a > 0$

P13. ($\star$) Demuestre que $f(x) = x^3 + 2x - 9$ es uniformemente continua en (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$

P14. ($\star$) **[2016-ii - C1]**

a) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable en (a, b). Pruebe que si f tiene dos puntos fijos distintos, entonces $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 1$

b) Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que

$$\exists k \in (0,1), \forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

1) Pruebe que $f'(x) < 1,\ \forall x \in (a, b)$
2) Concluya que f tiene un único punto fijo.

P15. **[1996 - C4]** Sea $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$

a) Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ existe y calcule su valor.

b) Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de f, en los puntos donde $f(x)$ existe

P16. **[1996 - C4]** Considere la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\frac{arctan(x)}{x}$ definida sobre $[-1, 1] \setminus \{0\}$

a) Defina f en 0 de modo que resulte continua en dicho punto (no utilice la regla de L'Hopital)

b) Pruebe que la función resultante, definida en $[-1, 1]$ es uniformemente continua

P17. Pruebe que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|sen(x) - sen(y)| \leq |x - y|, \qquad |cos(x) - cos(y)| \leq |x - y|$$

P18. ($\star$) Sea $a > b > 0$ y sea n un entero mayor o igual que 2. Demuestre que $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a - b)^{\frac{1}{n}}$.

Hint: Use TVM adecuadamente sobre $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x - 1)^{\frac{1}{n}}$ en el intervalo $[1, \sigma(a, b)]$ donde $\sigma(a, b)$ es una expresión de a y b

P19. Demuestre las siguientes desigualdades usando TVM

a) $\forall x > 0, 1 + x < e^x < 1 + xe^x$

b) $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N} : (1 + x)^n \geq 1 + nx$

P20. ($\star$) Demuestre que $\forall x \in (0, 1), \exists \xi \in (0, x)$ tal que $\dfrac{arctan(x)}{\frac{\pi}{2} - arccos(x)} = \dfrac{\sqrt{1 - \xi^2}}{1 + \xi^2}$

P21. ($\star$) **[2005 - P1 i-ii-iii) - C4]** Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{senh(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Sabiendo que f es diferenciable en 0 y g es dos veces diferenciable en 0. Se pide determinar, justificando, el valor de $g(0)$, y los valores de a y $f'(0)$ en función de $g'(0)$ y $g''(0)$

b) $y = f(x)$ está definida implícitamente por $x^2+xy+y^2-3=0$. Demuestre que el punto $P(1,-2)$ es un mínimo local de f

c) Verifique que la derivada de $f(x) = arcsen(2x-1) + 2arctan(\sqrt{\frac{1-x}{x}})$ es nula en el intervalo $[0,1)$

P22. Dada $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - x)^2$ encuentre su mínimo con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1,\ldots,n$ y demuestre que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

P23. ($\star$) Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada sobre $[a,b]$ si existe una constante $k \geq 0$ tal que $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq k$. Cualquiera sea el conjunto de puntos t_i tal que $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$. Demostrar que si f es derivable en $[a,b]$ (suponga que existe derivada en la frontera) tal que f' es acotada en (a,b) entonces es de variación acotada en $[a,b]$.

Indicación: use TVM

P24. **[2006 - C4 - P1 a)]**

a) Considere n reales distintos entre sí, denotados por $a_1,\ldots,a_n$. Se definen las funciones de P y f por

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$
$$f(x) = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n}$$

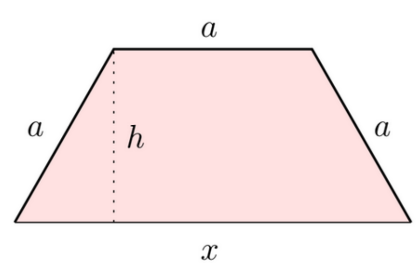
Denotamos por $A = \{x \in \mathbb{R} : P(x) \neq 0\}$

1) Probar que $\forall x \in A$ se cumple $f'(x) < 0$
2) Probar que $\forall x \in A$ se cumple $\frac{P'(x)}{P(x)} = f(x)$ y que $P(x)P''(x) < (P'(x))^2$

b) Considere n reales **estrictamente positivos**, denotados por $b_1,\ldots,b_n$. Demuestre que si $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $b_1^x + b_2^x + \cdots + b_n^x \geq n$ entonces necesariamente $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$ **Indicación:** Estudie si $x = 0$ es o no un punto crítico de $f(x) = b_1^x + b_2^x + \cdots + b_n^x$

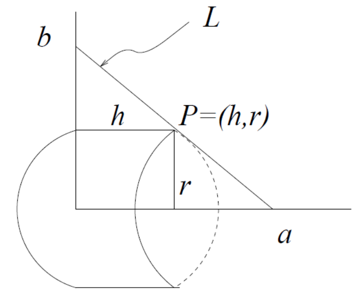
P25. ($\star$) **[2006 - C4 - P2]**

Se dispone de un alambre de largo 3α ($\alpha > 0$), con el cual se desea formar un trapecio isosceles con 3 lados iguales de largo α y el cuarto de largo x. Determine el valor de x para el cual el área del trapecio es máxima. Justifique su respuesta.



P26. [**1997 - C4**]

Determine el mayor volumen de un cilindro de radio r y altura h. Donde $P = (h, r)$ recorre la recta $L : ay + bx = ab,\ a, b > 0$ y $a + b = 1$. Analizar para que valor(es) de a este mayor volumen se maximiza.



P27. ($\star$) [**2017-1 - C1 - P2.a)**] Entre todos los triángulos rectángulos de perímetro $2p$, determine las dimensiones del que tiene área máxima.

P28. Para un planeta orbitando en torno a una estrella se define el potencial efectivo como:

$$U^*(r, w) = \frac{1}{2}mr^2w^2 - \frac{GMm}{r}$$

Donde m, M son las masas del planeta y la estrella respectivamente, w es la velocidad angular del planeta y G es la constante de Gravitación Universal.

Por tratarse de un proble de fuerzas centrales, el momento angular $l = mr^2w$ se mantiene constante durante todo el movimiento. Se sabe además que el planeta orbita en aquel punto donde el potencial alcanza un mínimo

a) Tomando el momento angular l como conocido, encuentre el radio orbital del planeta.

b) Si la órbita es circunferencial, entonces la velocidad angular es constante y vale $w = \frac{2\pi}{T}$. Donde T es el período orbital. Deduzca la tercera Ley de Kepler.

P29. ($\star$) [**2006 - C4 - P3**] Considere la función $f(x) = (x+1)ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

a) Encuentre ceros y signos de f

b) Estudie las asíntotas horizontales de f. Encuentre los limites laterales cuando $x \to 0^{\pm}$ y $x \to -1^{\pm}$ y ya sea, repare la función para que ea continua, o biem, detecte si hay asíntotas verticales.

c) Use el teorema de valor medio en la función auxiliar $g(x) = ln(|x|)$ en el intervalo $[x, x+1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

d) Calcule la primera derivada de f. Use el resultado de la parte anterior para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$

e) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa

f) Estudie los limites de $f'(x)$ cuando $x \to -1^+$ y cuando $x \to 0^{-1}$. Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya sobre la monotonía de f' en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$. Bosqueje el gráfico de f

P30. **[2004 - C4]** Estudiar completamente la función definida por

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3ln(x)}{x}$$

Para esto:

a) Establezca el dominio y encuentre por inspección un cero de f

b) Estudie asíntotas verticales y horizontales

c) Estudie asíntotas oblicuas

d) Calcule f' y determine sus ceros por inspección. Estudie crecimientos, máximos y mínimos

e) Calcule f''. Estudie convexidades y encuentre puntos de inflexión

f) Haga un bosquejo del gráfico de f. Indique el recorrido de f

P31. ($\star$) Encuentre un desarrollo limitado para $\varphi(x) = sen(x) + cos(x)$ en torno a $\overline{x} = 0$, cuyo error máximo de aproximación en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sea inferior a 10^{-3}

P32. ($\star$) **[2005 - C4]** Considere la función definida por $f(x) = e^{\sqrt{2}sen(x)}$

a) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 para $f(x)$ en torno a $x_0 = 0$. (Sin resto).

b) Estudiar completamente $f(x)$. Se pide

1) Dominio, ceros (si existen), signos de f, continuidad y periodicidad.
2) Cálculo de $f'(x)$, crecimiento y valores extremos relativos y absolutos.
3) Cálculo de f'', concavidad (convexidad) y puntos de inflexión
4) Tabla de valor principales, recorrido y gráfico aproximado

P33. **[2005 - C4]**

a) Una planta productora de cobre con capacidad instalada máxima de $9ton/dia$,puede producir x toneladas de cobre corriente e y toneladas de cobre fino diarias. Si se sabe que las producciones diarias de cobre fino y corriente cumplen la relación $y = \dfrac{40-5x}{10-x}$ y que el precio de venta del cobre fino es 3,6 veces el precio del cobre corriente, se pide determinar cual es la producción diaria que proporciona un ingreso máximo.

b) Sea $f(x)$ continua en $[0,\infty)$, diferenciable en $(0,\infty)$ y tal que $f(0) = 0$ y $f'(x)$ es creciente en $\mathbb{R}^+$.
Use el teorema de Valor Medio para probar que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ en $\mathbb{R}_+$ y deduzca que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $\mathbb{R}^+$

c) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{ln(e^{-x} + xe^{-x})}{x^2}$

P34. **[2004 - C4]**

a) Considere la función definida por $f(x) = \dfrac{a}{2}ln\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$ con $a > 0$

1) Demuestre que $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

2) La tangente trazada a la curva definida por $y = f(x)$ en un punto $P(x_0, y_0)$ cualquiera de ella, corta al eje OY en un punto T. Pruebe que la longitud de PT es constante (independiente de $P(x_0, y_0)$)

P35. ($\star$) **[1996 - C5]** Utilice un desarrollo de Taylor de orden 2 para aproximar $\sqrt{3}$, con al menos dos decimales exactos.

P36. ($\star$) **[1996 - C4]** Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable con $g'(x) \neq 0$ en todo $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = cos(kg(x))$$

a) Muestre que f, f', f'', g, g' y g'' satisfacen la siguiente ecuación

$$f'' - f'\frac{g''}{g'} + (kg')^2 f = 0$$

b) Calcule $f^{(n)}(0)$ para $g(x) = x$

P37. **[1996 - C4]** Sea $b > 0,\ a \in]-b, b[$ y $f : [-b, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (b^2 - x^2)(a - x)$

a) Muestre que $\forall x \in [-b, b]$ y $\forall h \in [-b - x, b - x]$

$$f(x) - f(x + h) = -h(3x^2 - 2xa - b^2 + h^2 + 3xh - ah) \tag{1}$$

b) Muestre que f admite sólo un mínimo global y sólo un máximo global en $[-b, b]$
Indicación: Puede procedes como sigue. Determine los candidatos extremos y utilice la ecuación (1) para probar que efectivamente son extremos

c) Muestre que la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de f en $[-b, b]$ es $\frac{4}{27}(\sqrt{a^2 + 3b^2})^3$ y calcule el valor de a que hace mínima esta diferencia.

P38. **[1998 - C4]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2 veces derivable con segunda derivada continua. Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, fijo, y un real $h > 0$ se pide:

a) Demostrar que los coeficientes a_h, b_h y c_h de la parábola

$$y = c_h + b_h(x - x_0) + a_h(x - x_0)^2$$

que coinciden con el grafo de f en los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_0+h, f(x_0+h)), (x_0+2h, f(x_0+2h))$, son

$$a_h = \frac{f(x_0) + f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h)}{2h^2}, \quad b_h = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h}$$

$$\text{y} \quad c_h = f(x_0)$$

b) Definamos $a = \lim_{h\to 0} a_h,\ b = \lim_{h\to 0} b_h$ y $c = \lim_{h\to 0} c_h$. Demostrar, usando la regla de L'hopital, que $a = \frac{1}{2}f''(x_0),\ b = f'(x_0)$ y $c = f(x_0)$

c) Calculas los coeficientes a, b y c definidos en la parte (b) para la función definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^5 ln(1 + x^2)$ y el punto $x_0 = 1$

P39. ($\star$) **[1997 - C4]** Considere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de α para que f sea continua en $\mathbb{R}_+^*$.

b) Analice la existencia de $f'(x)$ para $x > 0$. En caso de existir, calcúlela.

c) Determine los puntos de continuidad de f' en $]0, \infty[$.

d) Asuma que $f^{(n)}$ existe para $n \geq 2$ y que es continua en 1. Calcule una recurrencia para $f^{(n)}(1)$, utilizando la formula de Leibnitz para $(x-1)f(x)$

e) Encuentre un polinomio de Taylor de orden 3 para f en torno a 1

P40. **[1997 - C4]** Analice completamente $f(x) = e^{\frac{1}{ln(x)}}$ (dominio,paridad,periodicidad, recorrido, asíntotas de todo tipo, derivada, crecimiento , mínimo y máximos, derivada segunda, concavidad, puntos de inflexión, gráfico)

P41. ($\star$) **[1997 - C4]** Calcule el limite $\lim\limits_{x \to 0} x^2 ln(\dfrac{sen(x)}{x})$

P42. **[1997 - C4]** Sean $0 < a < b$. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), con $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que existe $c \in (a, b)$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$

P43. **[2003 - C4]** Considere la función $f : (-1, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{ln(1-x)}{ln(1+x)}$

a) Calcule $\lim f(x)$ cuando $x \to -1^+$ y $x \to 1^{-1}$

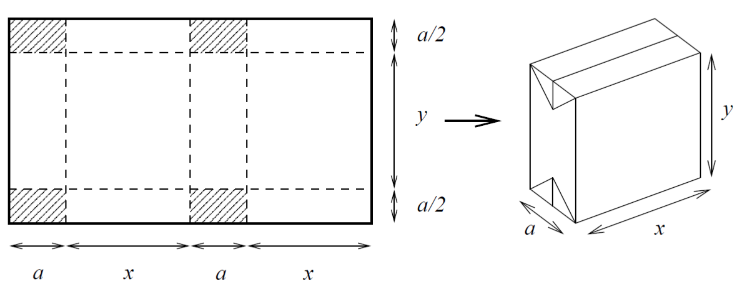
b) Pruebe que el valor $f(0) = -1$ repara la continuidad de f en $x = 0$

c) Calcule f' para $x \neq 0$

d) Calcule por definición $f'(0)$

e) Pruebe que f es decreciente. **Indicación:** use que $ln(z) \geq 1 - \frac{1}{z}$ para $z > 0$

P44. **[2003 - C4]** Un envase TetraPak se fabrica plegando un rectángulo de cartón como indica la figura (las regiones achuradas corresponden a los pliegues de las esquinas)



Se desean determinar las dimensiones óptimas a, x, y que minimicen la superficie del rectángulo original para un volumen total de 1000 (un litro)

(I) Encuentre una expresión de la superficie sólo en términos de las cantidad a, x

(II) Tomando a como parámetro conocido, demuestre que el valor $x = x(a)$ que minimiza dicha superficie es $x = \sqrt{\dfrac{1000}{a}}$. Justifique que se trata de un mínimo

(III) Use (ii) para obtener una expresión $S(a)$ para la superficie en función solamente de a y luego determine el valor mínimo de esta función (justifique por qué es mínimo). Explicite los valores óptimos de a, x, y