MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar Extra: lo que no se vio de continuidad

01 de septiembre de 2017

P1. Considere la función

$$f(x) = \lim_{y \to 0} \frac{e^y + sen(x) - 1}{x + y}$$

Determine $f(0)$ y $f(x)$ para $x \neq 0$ y analice la continuidad de f en $\mathbb{R}$

P2. Considere la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{sen(\pi x)}{x(x-1)}$. Demuestre que es continua en su dominio y determine si es posible reparar f de modo que sea continua en todo $\mathbb{R}$

P3. sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{ln(1+x)} & si \quad x > 0 \\ (x - \alpha)^2 & si \quad x < 0 \\ \beta & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

P4. Una función se denomina función de Lipschitz, si cumple con:

$$\exists L > 0,\ \forall x, y \in Dom(f),\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Demuestre que si f es Lipschitz, entonces es uniformemente continua

P5. [P1 a) Control 1 - 2011]
Estudie la continuidad uniforme en $(0, 1)$ de las siguientes funciones:

a) $xsin(1/x)$

b) $f(x) = e^x cos(\frac{1}{x})$

P6. ($\star$) Sea $f : [0, +\infty) \to R$ una función continua en todo su dominio y es tal que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ con $L \in \mathbb{R}$. El objetivo de esta pregunta es probar que f es uniformemente continua, para eso siga los siguientes pasos:

a) Demuestre que f es uniforme continua en el intervalo $[N_\varepsilon, +\infty)$ donde N_ε es un valor que depende de ε dado por $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

b) Pruebe que f es uniformemente continua en el intervalo $[0, N_\varepsilon]$

c) Estudie el caso faltante y concluya

d) **[Propuesto]** Si ahora $Dom(f) = \mathbb{R}$ y cumple que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$. Demuestre que f es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

P7. ($\star$) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica, de periodo $p > 0$. Pruebe que f es uniformemente continua.

Nota:

- Solución P1. en C1 2014 primavera.
- Solución P2, la voy a subir.
- Solución P3, idem P2.
- Solución P4, en Resolución Auxiliar 2.
- Solución P5, en Resolución Auxiliar 2.
- Solución P6, en Resolución Auxiliar 2.
- Solución P7, la voy a subir.