

MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Leonardo Sánchez C.**Auxiliar:** Marcelo Navarro**Auxiliar 4: Aplicaciones de Derivadas**

31 de agosto de 2017

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $\bar{x}$ es mínimo local de la función f si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$$

Es decir, llamaremos a $\bar{x}$ como mínimo local si $f(\bar{x})$ es el menor valor en alguna vecindad. Notar que con esto, pueden existir muchos mínimos locales.

De manera análoga se define el máximo local

- [Máximos y Mínimos]** Si $\bar{x} \in (a, b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$
- [Teorema de Rolle]** Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Luego existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
- [TVM]** Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- [L'Hopital]** Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables tales que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Donde $L = 0$ o $L = \infty$. Luego:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Se tiene lo siguiente

- Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente.
- Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente.

Análogo para estrictamente creciente/decreciente

- [Convexidad]** Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa si $\forall x, y \in [a, b], x < y$ se tiene que

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right] (z - x), \quad \forall z \in (x, y)$$

o equivalentemente

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

- Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y sólo si f' es creciente en (a, b) . En el caso de que f' sea diferenciable, notamos que f sera convexa si $f'' \geq 0$.
- [Concavidad]** f se dirá cóncava si $-f$ es convexa. Por lo tanto, en el caso de que f sea diferenciable se estudiará si f' es decreciente

P1. Pruebe que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$$

P2. a) Usando el teorema de valor medio o TVM, demuestre que

$$1 + \ln(x) < (x + 1)\ln(x + 1) - x\ln(x) < 1 + \ln(x + 1), \quad \forall x > 0$$

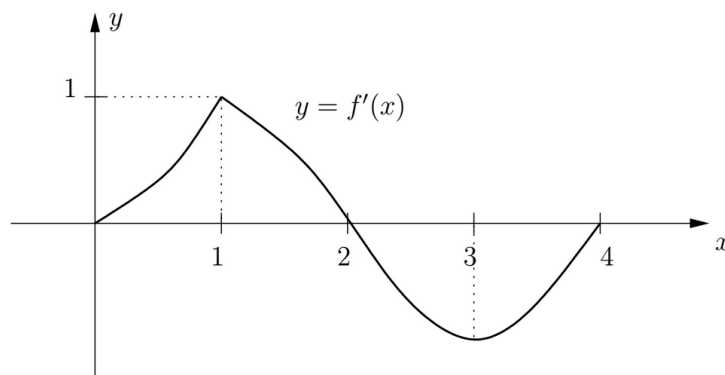
b) Deduzca de (a) la desigualdad

$$n\ln(n) - (n - 1) \leq \ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n) < (n + 1)\ln(n + 1) - n, \quad \forall n \geq 1$$

P3. Calcular

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

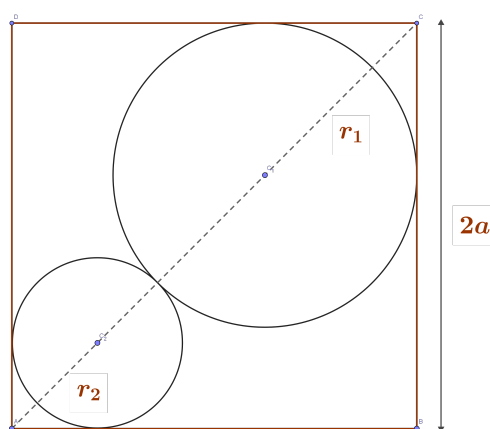
P4. Se sabe que un bosquejo del gráfico de la derivada de una función $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ es el dado en la figura siguiente. Además se sabe que $f(0) = 1$



Usando esta información encuentre el gráfico aproximado de la función f . Debe indicar precisamente en que intervalos f es creciente, decreciente, cóncava o convexa, además donde alcanza su máximos y mínimos locales o globales y donde tiene sus inflexiones. Debe probar además que f es acotada superiormente por 3 (use TVM)

P5. En un cuadrado de lado $2a$ se inscriben dos circunferencias de radios r_1 y r_2 , centradas en la diagonal del cuadrado, tangentes entre si y ambas tangentes al cuadrado.

- Encuentre una relación entre r_1 y r_2
- Determine los valores de r_1 y de r_2 de modo que la suma de las áreas de los círculos sea máxima. Justifique



P6. [Propuesto] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Demostrar que si para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x) > 0$ y $f(x)f''(x) \geq (f'(x))^2$, entonces la función definida en $\mathbb{R}$ por $g(x) = \ln(f(x))$ es convexa.