Aux #3

P1 a) $\dfrac{\text{Senh}(4x)}{\ln(x^2+1)}$

Regla del cuociente

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Senh}(4x)}{\ln(x^2+1)}\right) = \frac{4\cosh(4x)\ln(x^2+1) - \text{senh}(4x)\frac{2x}{x^2+1}}{(\ln(x^2+1))^2}$$

b) x^x : Dos formas (obs: no sirve $(x^n)' = nx^{n-1}$ pues el exponente en el problema varía)

Notemos que si $x \leq 0$ hay múltiples discontinuidades por ejemplo $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}}} \notin \mathbb{R}$

Luego $f(x) = x^x$, $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

Entonces podemos escribir

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = e^{x\ln(x)} \cdot (x\ln(x))'$$

$$= x^x \cdot \left(1\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

Forma 2)

o bien podemos usar derivada logarítmica

$\Rightarrow$ para x^x tomamos $y = x^x$ donde $y = y(x)$ ← expresión que depend de x

$\Rightarrow \quad y = x^x \quad / \ln(\,)$

$\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln(x^x)$

$\Rightarrow \quad \ln(y) = x\ln(x) \quad / \frac{d}{dx}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln(x) + 1$

$\Rightarrow \quad y' = y(\ln(x) + 1) \qquad y = x^x$

$= x^x(\ln(x) + 1)$ ∎

---

c) $g(x) = \cosh^{-1}(x)$

Aquí la receta es dada la inversa, se componen

$\Rightarrow \quad \cosh(\cosh^{-1}(x)) = x \quad / \frac{d}{dx}$

$\Rightarrow \quad \operatorname{senh}(\cosh^{-1}(x)) \cdot (\cosh^{-1}(x))' = 1$

$\Rightarrow \quad (\cosh^{-1}(x))' = \dfrac{1}{\operatorname{senh}(\cosh^{-1}(x))}$

debemos calcular esto

Usaremos el hecho que se tiene que

$$(\cosh(x))^2 - (\operatorname{Senh}(x))^2 = 1$$

$\Rightarrow$ despejando el seno hiperbolico

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Senh}(x) = \pm\sqrt{1-(\cosh(x))^2}$$

Por simplicidad tomemos el lado positivo

$$\Rightarrow \quad \operatorname{senh}(x) = \sqrt{1-(\cosh(x))^2}$$

$$\Rightarrow \quad \cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(\cosh^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\cosh(\cosh^{-1}(x)))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\boxed{\text{Q.E.D.}}$

$\boxed{P2}$ $\phi(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Estudiar diferenciabilidad de ϕ en $\mathbb{R}$

Desarrollo: Notar que ϕ es definida por tramos por lo que en $x=0$ no podemos derivar de otra forma si no es por definición, todo esto en el caso que sea diferenciable en 0.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es decir, $x \neq 0$

$\phi(x) = x^n \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ es derivable por algebra y composición de derivables, esto $\forall n \geq 1$

Para $x=0$ debemos ver que $\lim_{x \to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0}$ existe, en cuyo caso ϕ será derivable

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^n \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} x^{n-1} \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ \nexists & \text{si } n = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \lim \operatorname{sen}\frac{1}{x} \text{ diverge}$$

Luego si $n \geq 2$ ϕ será diferenciable y su derivada será

$$\phi'(x) = \begin{cases} n x^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^n \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n x^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

si $n = 1$ no es derivable en $x = 0$ y por lo tanto no es derivable en todo $\mathbb{R}$

$\boxed{P3}$ Encontrar tangente y Normal en $P = (x, 0)$ con $x > 0$ a la curva

$$e^{2\arcsin(yx)} = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

Idea: una recta tangente es una recta que pasa por un solo punto a la curva

Como tenemos el punto $P=(x_p, y_p)$, dado su pendiente m la recta es

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

donde ocuparemos la derivada para encontrar $m = f'(x_p)$

Desarrollo: necitamos el punto P exacto y solo tenemos $y=0$

reemplazemos en la curva

$$e^{2\arcsen(0)} = \ln(1+x^2+0)$$

$$\Rightarrow e^0 = \ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow 1 = \ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow e = 1+x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{e-1}$$

Como $\underbrace{x>0}_{\text{enunciado}} \Rightarrow x = \sqrt{e-1}$

Luego $P = (\sqrt{e-1}, 0)$, falta la pendiente

derivemos...

$$\Rightarrow \quad e^{2\arcsen(yx)} = \ln(1+x^2+y^2) \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad e^{2\arcsen(yx)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-(yx)^2}} \cdot (yx)' = \frac{1}{1+x^2+y^2} \cdot (1+x^2+y^2)'$$

$$\Rightarrow \quad e^{2\arcsen(yx)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-(yx)^2}} \cdot y'x + y = \frac{2x+2yy'}{1+x^2+y^2}$$

evaluamos en $x = \sqrt{e-1}$ $y = 0$

$$\Rightarrow \quad e^0 \cdot \frac{2}{\sqrt{1}} \cdot y'\sqrt{e-1} + 0 = \frac{2\sqrt{e-1} + 0}{1+(\sqrt{e-1})^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{e-1}\, y' = \frac{2\sqrt{e-1}}{e}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{e}$$

Luego la recta tangente es

$$y - 0 = \frac{1}{e}(x - \sqrt{e-1})$$

y la recta normal, en especifico su pendiende debe cumplir que

$$m_{Normal} \cdot \frac{1}{e} = -1$$

$$\Rightarrow m_{Normal} = -e$$

$\Rightarrow$ Recta normal

$$y - 0 = -e(x - \sqrt{e-1})$$

$\boxed{P4}$ pdq $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ usando x^{2n}

idea: derivar n veces x^{2n} de 2 formas distintas

$\boxed{\text{Forma 1}}$ Sin formula de Leibnitz

$$(x^{2n})^{(n)} = 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot (2n-(n+1)) \cdot x^n$$

$$= \frac{2n!}{n!} x^n$$

En general

dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que para $k = 1, \dots, n$

$$\circledast \quad (x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

(TAREA probar por inducción)

Forma 2) por Leibnitz usando $x^n \cdot x^n = x^{2n}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^n)^{(k)} (x^n)^{(n-k)}$$

usemos $\circledast$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (x^n)^{(n-k)}$$

usemos $\circledast$ considerando $n-k$ en vez de k

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{(n-(n-k))!} x^{n-(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} x^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k} n! \, x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 n! \, x^n$$

Luego las 2 formas de derivar deben ser iguales

$$\Rightarrow \quad \frac{2n!}{n!}\, x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 n!\, x^n \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

Tomando $x = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{2n!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 n!$$

"n" no depende de k

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \qquad / \cdot \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2n!}{n! \cdot n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

$$\Rightarrow \quad \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

$\boxed{P5}$ a) f, g derivable tal que

1) $g(x) = x f(x) + 1$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad g(x+y) = g(x) g(y)$

3) $f(0) = 1$

[i] pdq $\quad g'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En efecto hagamos un intento inocente, derivemos ocupando la info 1)

$\Rightarrow \quad g(x) = x f(x) + 1 \qquad / \frac{d}{dx}$

$\Rightarrow \quad g'(x) = f(x) + x f'(x)$

$\qquad \overset{?}{=} \; x f(x) + 1$ ¿? no sabemos por lo que debemos buscar otra forma

Calculemos por definición ocupando $\lim\limits_{h \to 0} \ldots$

$\Rightarrow$ Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}$ arbitrario

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{g(\bar{x}+h) - g(\bar{x})}{h} \overset{\text{Prop 2)}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{g(\bar{x})g(h) - g(\bar{x})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} g(\bar{x}) \frac{(g(h) - 1)}{h}$$

$$= g(\bar{x}) \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - 1}{h}$$

$$= g(\bar{x}) \lim_{h \to 0} \frac{h f(h) + \cancel{1} - \cancel{1}}{h}$$

$$= g(\bar{x}) \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} f(h)}{\cancel{h}}$$

$$= g(\bar{x}) \cancel{\lim_{h \to 0} f(h)}^{\,1}$$

$$= g(\bar{x})$$

Luego $g'(\bar{x}) = g(\bar{x})$ con $\bar{x}$ arbitrario por lo que se tiene en todo $\mathbb{R}$

2) pdq $\forall n \geq 1$ $g(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$

¿O inducción? mm.. tenemos Leibnitz!

notemos que $g(x) = xf(x) + 1 \quad / \frac{d}{dx}$

$$g(x) = g'(x) = (xf(x))' \quad / \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$$

Parte 1)

$$g(x) = g^{(n)}(x) = (xf(x))^{(n)}$$

Por lo que derivar n-veces g es lo mismo que derivar n veces $xf(x)$

$\Rightarrow$ por Leibnitz

$$(xf(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} f(x)^{(n-k)}$$

$$= \binom{n}{0} x f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} 1 f^{(n-1)}(x) + \underbrace{\ldots + \binom{n}{n} x^{(n)} f(x)}_{¿\text{Por que?}}$$

$$= xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x) + 0$$

Entonces

$$g(x) = g'(x) = g''(x) = \dots = g^{(n)}(x)$$

y $g^{(n)}(x) = (xf(x))^{(n)} = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$

$\Rightarrow \quad g(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$

evaluando en 0

$$g(0) = \cancel{0f^{(n)}}(0) + nf^{(n-1)}(0)$$

$$g(0) = nf^{(n-1)}(0)$$

pero por (1) $\quad g(0) = 0f(0) + 1 = 1$

$\Rightarrow \quad 1 = nf^{(n-1)}(0)$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{n} = f^{(n-1)}(0)$

b) $\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x + x\delta)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\delta}}$

Como $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ puedo garantizar que $\frac{f(x+x\delta)}{F(x)}$ es positivo por lo que puedo poner Logaritmo

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{f(x+x\delta)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\delta}} \qquad / \operatorname{Ln}(\,)$$

$$= \ln(y) = \frac{1}{\delta}\left(\ln(f(x+x\delta)) - \ln(f(x))\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta \to 0} \ln(y) = \lim_{\delta \to 0} \frac{(\ln(f(x+x\delta)) - \ln(f(x)))}{\delta}$$

derivo con respecto a δ

$$\overset{L'H}{=} \lim_{\delta \to 0} \frac{(\ln(f(x+x\delta)))' - (\ln(f(x)))'}{\delta'}$$

cte

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\frac{f'(x+x\delta)}{f(x+x\delta)} \cdot x}{1}$$

$$= \frac{x f'(x)}{x}$$

Luego

$$\ln(y) \longrightarrow \frac{x f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \quad y \rightarrow e^{\frac{x f'(x)}{f(x)}} > 0 \quad \blacksquare$$