Aux #2

$\boxed{P1}$ Sea $g_n(x) = x^n + x - 1$

a) pdq $\forall n \geq 1$, $g_n(x)$ tiene una raiz r_n positiva

<u>Idea:</u> nos piden probar la existencia de una raiz por lo que debemos utilizar TVI.

<u>Desarrollo:</u> Sea $n \geq 1$ arbitrario, Como $g_n(x) = x^n + x - 1$ es un polinomio, g_n es continua en todo $\mathbb{R}$.

Luego, mediante "inspección" (es decir, busqueda), podemos notar que

$$g_n(0) = 0^n + 0 - 1 = -1$$
y
$$g_n(1) = 1^n + 1 - 1 = 1$$

Luego $g_n(0)g_n(1) \leq 0$ y g_n es continua

$\implies$ Por T.V.I, $\exists r_n \in (0,1)$ tal que $g_n(r_n) = 0$

Donde claramente $r_n > 0$ $\forall n \geq 1$

b) pdq $(r_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente

En efecto, esto pide a gritos usar Bolzano-Weistrass por lo que por la parte a) se tiene que

$$\forall n \geq 1, \ r_n \in (0,1)$$

es decir $(r_n)_{n\geq 1}$ es acotada, y por B-W, existe una subsucesión convergente

$\boxed{P2}$ a) $f:[0,1]\to[0,1]$ continua.

pdq f tiene un punto fijo

En efecto, queremos probar que

$$f(x)=x \quad \text{para algun } x\in[0,1]$$

Lo anterior es equivalente a

$$f(x)-x=0 \quad \text{para algun } x\in[0,1]$$

llamando $g(x)=f(x)-x$, g es continua por algebra de continuas, el problema se reduce a

$$g(x)=0 \quad \text{para algun } x\in[0,1]$$

Ahora podemos usar TVI para resolver el problema

Ahora si, en efecto, sea $g(x)=f(x)-x$, donde g es continua por algebra de continuas y $g:[0,1]\to[-1,1]$

obs: notemos que $\forall x\in[0,1],\ f(x)\in[0,1]$
$\iff \forall x\in[0,1],\ 0\leq f(x)\leq 1$

Veamos ahora que

$$g(0)=f(0)-0=f(0)\geq 0$$

$$g(1)=f(1)-1\leq 0$$

Luego $g(0)g(1)\leq 0 \Rightarrow \exists\bar{x}\in[0,1]$ tq $g(\bar{x})=0$

es decir, $\exists\bar{x}\in[0,1],\ f(\bar{x})=\bar{x}$ ▨

$\boxed{P2}$ b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. pdq: $\exists c,d$ tq $f([a,b]) = [c,d]$

En efecto, como f es continua sobre $[a,b]$, cerrado y acotado, por teorema de Weierstrass f alcanza su máximo y su mínimo. Es decir $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

donde mínimo $:= f(x_1)$ y máximo $:= f(x_2)$

Luego, basta con definir $c = f(x_1)$ y $d = f(x_2)$

$\Rightarrow \quad \forall x \in [a,b], \quad c \leq f(x) \leq d$

$\Leftrightarrow \quad \forall x \in [a,b], \quad f(x) \in [c,d]$

Con esto se tiene que $f([a,b]) \subseteq [c,d]$ ∎

Falta ver que $[c,d] \subseteq f([a,b])$

sea $e \in [c,d] \Leftrightarrow \min f(x) \leq e \leq \max f(x)$
Luego por TVI generalizado existe $\bar{x} \in [a,b]$ tal que $f(\bar{x}) = e$

$\Rightarrow \quad e \in f([a,b])$

$\Rightarrow \quad [c,d] \subseteq f([a,b])$ ∎

$\therefore \quad [c,d] = f([a,b])$ con $c := \min f(x)$
$d := \max f(x)$

c) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

pdq: $\exists x_0 \in [a,b]$ tq $f(x_0) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

En efecto, por Weierstrass f alcanza su mínimo y su máximo, digamos m y M respectivamente

$$\Rightarrow \quad \forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M$$

Como es $\forall x \in [a,b]$, en particular lo es para $x=a$ y $x=b$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} x=a & m \leq f(a) \leq M \\ x=b & m \leq f(b) \leq M \end{array} \Big\} \text{ Sumamos}$$

$$+ \quad \overline{\hphantom{m \leq f(a)+f(b) \leq M}}$$

$$2m \leq f(a)+f(b) \leq 2M \quad \Big\} \text{ dividimos por } 2$$

$$\Rightarrow \quad m \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq M$$

por la parte anterior

Luego $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} \in [m, M] = f([a,b])$

Luego por TVI generalizado, $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que

$$f(x_0) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$\boxed{P3}$ a) $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$

pdq f es continua y $\exists! \bar{x} \in \mathbb{R}$ $f(\bar{x}) = 0$

En efecto, f es continua por algebra y composición de funciones continuas.

- Veamos la existencia de una raiz

Por TVI: $f(0) = -5$
$f(1) = 1 + 7 - 5 = 3$

Luego $f(0)f(1) \leq 0$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (0,1)$ $f(\bar{x}) = 0$

- Veamos ahora que es unico, esto lo haremos descartando la existencia de más raices

↳ no hay raices en $(-\infty, 0)$, ya que dado $x < 0$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{x^{13}}_{<0} + \underbrace{7x^3}_{<0} \underbrace{-5}_{<0} < 0$$

es decir, si x es estric. negativo $\Rightarrow f(x)$ tambien lo será. Por lo que no hay raices en $(-\infty, 0)$

↳ no puede haber otra raiz en $[0, \infty)$, ya que f es estrictamente creciente. En efecto

5

Sean $x, y \in (0,\infty)$ tales que

$0 \leq x < y$, estudiemos

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= x^{13} + 7x^3 - 5 - (y^{13} + 7y^3 - 5) \\
&= x^{13} + 7x^3 \cancel{-5} - y^{13} - 7y^3 \cancel{+5} \\
&= x^{13} - y^{13} + 7x^3 - 7y^3 \\
&= x^{13} - y^{13} + 7(x^3 - y^3) \\
&= \underbrace{x^{13} - y^{13}}_{<0} + \underbrace{7\underbrace{(x-y)}_{<0}\underbrace{(x^2 + xy + y^2)}_{>0}}_{<0}
\end{aligned}
$$

Como $x < y \Leftrightarrow x - y < 0$

además
$$
\left.
\begin{aligned}
& 0 < x < y \\
\wedge\ & 0 < x < y \\
& \vdots \\
\wedge\ & 0 < x < y
\end{aligned}
\right\} \text{13 veces}
$$

$\Rightarrow x^{13} < y^{13} \Rightarrow x^{13} - y^{13} < 0$

Luego si $0 < x < y \Rightarrow f(x) - f(y) < 0$

$\Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Por lo que f es estrictamente creciente

Luego no puede volver a pasar por otro cero, $\boxed{M}$

6

$\boxed{P3}$ b) pdq $x^3 = 2^x$ tiene Solución

En efecto, definimos $g(x) = x^3 - 2^x$

$g(0) = (0)^3 - 2^{(0)} = 0 - 1 = -1$

$g(1) = (1)^3 - 2^{(1)} = 1 - 2 = -1$

$g(2) = (2)^3 - 2^{(2)} = 8 - 4 = 4$

Tomo estos obs

Luego $g(1) \cdot g(2) \leq 0$ y g es continua por algebra de continuas

$\Rightarrow$ por TVI $\exists \bar{x} \in [1,2]$ tq $g(\bar{x}) = 0$

$\Rightarrow$ $x^3 = 2^x$ tiene solución

$\boxed{P4}$ si f satisface que

$\exists L > 0 \ \forall x,y \in Dom(f) \ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$

pdq f es uniforme continua

<u>Idea:</u> , notemos que queremos probar que

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x,y \in Dom(f) \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Al final de todo queremos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, partamos de la propiedad de Lipschitz tenemos que $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$

y queremos $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$, cuando $|x-y| \leq \delta$

Juntando, podemos hacer lo sgte

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \leq L\delta < \varepsilon$$

$$|x-y| \leq \delta$$

$\Rightarrow$ Si damos ε fijo tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ ya que $L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$. Y además notemos que δ solo depende de ε y L no de "x" ni de "y"

<u>Desarrollo</u>: en efecto, sea $\varepsilon > 0$ fijo, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ ya que $\forall x, y$

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \leq L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

cuando $|x-y| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{L}$.

Luego como δ depende de ε y L, y esto funciona para cualquier $x, y \in Dom(f)$

f es uniforme continua

$\boxed{P5}$ estudiar en $(0,1)$ la continuidad uniforme

a) $x \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Aqui podemos reparar la función, notemos que

- $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ya que

$$0 \leq \left| x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \quad / \lim_{x \to 0}$$

$$\searrow \; 0 \; \swarrow$$

¿Para que sirve esto? veremos que

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

es continua uniforme, luego como g es U.C en $[0,1]$ en particular lo es en $(0,1)$

entonces

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Claramente g es continua en $(0,1]$ por algebra de continuas, y además es continua en 0 pues

$$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0$$

Luego g es continua sobre $[0, 1]$

$\Rightarrow$ por TEO visto g es uniformemente continua en $[0, 1]$

finalmente como g es Unif. continua en $[0, 1]$ tambien debe serlo en $(0, 1)$

y como $g(x) = x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \quad \forall x \in (0, 1)$

Se concluye que $x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ es uniformemente continua $\blacksquare$

---

b) $f(x) = e^x \cos(\frac{1}{x})$

Idea: Veamos si sirve el mismo truco

$$\lim_{x \to 0} e^x \cos(\tfrac{1}{x}) = \ldots \nexists \quad \text{pues} \quad \begin{array}{l} e^x \to 1 \\ \cos(\frac{1}{x}) \to \nexists \end{array}$$

Luego no tenemos continuidad en 0 mediante una extensión por lo que intentemos probar que $f(x) = e^x \cos(\frac{1}{x})$ no es uniformemente continua. Es decir queremos probar la negación de continuidad uniforme

$$\neg \{ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in (0, 1) \ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \}$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \forall x, y \in (0, 1) \ |x - y| \leq \delta \ \wedge \ |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Esto es complicado, veamos otro formato...

Luego, en vez de tomar un x o un y cualquiera podemos tomar sucesiones. es decir, lo anterior

$$\exists \varepsilon > 0 \ \underbrace{\forall \delta > 0 \ \exists x, y \in (0,1) \ |x-y| \leq \delta}\ \wedge \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists \{x_n\}, \{y_n\} \subseteq (0,1), \ \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0}_{\text{rol de convergencia}}$$

tal que $|x_n - y_n| \leq \delta \ \wedge \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

$\Leftrightarrow$
- existe un real positivo $\varepsilon \hookrightarrow (\exists \varepsilon > 0)$
- tq existen 2 sucesiones $(x_n), (y_n)$ tales que $(x_n - y_n) \to 0$
  $\hookrightarrow \forall \delta > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ |x_n - y_n| \leq \delta$
- y ademas $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$ (no converge)
  $\hookrightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

En sintesis debemos probar que

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists (x_n), (y_n) \in (0,1) \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0$$

$$|x_n - y_n| \leq \delta \ \wedge \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

<u>Desarrollo</u>: En efecto, desarrollemos una idea y luego formalizemos

notemos que si escogemos $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$

$|x_n - y_n| \longrightarrow 0$ ya que $x_n \to 0$ y $y_n \to 0$

Luego se cumple inmediatamente que

$\forall \delta > 0 \ \exists n_0 > 0 \ \forall n \geq n_0 \quad |x_n - y_n| \leq \delta \quad$ Con $x_n = \frac{1}{2\pi n}$

$y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$

¿Que ocurre con $\exists \varepsilon > 0$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$?

Veamos $|f(x_n) - f(y_n)| = |e^{\frac{1}{2\pi n}} \cancel{\cos(2\pi n)}^{1} - e^{\frac{1}{2\pi n + \pi}} \cancel{\cos(2\pi n + \pi)}^{-1}|$

$= |e^{\frac{1}{2\pi n}} + e^{\frac{1}{2\pi n + \pi}}|$

si $n \to \infty \iff \exists n_0 \ \forall n \geq n_0$

≥ 2 , pues $e^{\frac{1}{2\pi n}} \to e^0 = 1$

y $e^{\frac{1}{2\pi n + \pi}} \to e^0 = 1$

Luego $|f(x_n) - f(y_n)| \geq 2$ para $x_n = \frac{1}{2\pi n}$

y $y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$

Por lo que si queremos que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

Podemos tomar $\varepsilon_0 = 2$.

Formalizando, sea $\varepsilon = 2$ si tomamos $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$

Se tiene que $|x_n - y_n| \to 0$ pero $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon = 2$

Por lo que $f(x) = e^{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ no es uniformemente continua ▨

$\boxed{P6}$ $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Continua tq $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

a) probar que es uniforme continua en $[N_\varepsilon, \infty)$

En efecto, notemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon > 0\ \forall x \geq N_\varepsilon\ |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon > 0\ \forall x \in [N_\varepsilon, \infty)\ |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

queremos probar que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in [N_\varepsilon, \infty)\quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

donde N_ε es el dado por $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, notar que N_ε puede cambiar dependiendo del ε

Así que nos tenemos que asegurar de controlar el N_ε

Respuesta: Sea $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon'}{2} > 0$ arbitrario, este $\frac{\bar{\varepsilon}}{2}$ lo tendremos durante toda la pregunta

$\Rightarrow \bar{\varepsilon} > 0$, luego como $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$

$\exists N_{\bar{\varepsilon}} > 0$ tq $\forall x \in [N_{\bar{\varepsilon}}, \infty)$ $|f(x) - L| \leq \bar{\varepsilon}$

$(*)$

Ahora bien, sean $x, y \in [N_{\bar{\varepsilon}}, \infty)$ cualesquiera, como los saque de $[N_{\bar{\varepsilon}}, \infty)$ ambos deben cumplir que

$$|f(x) - L| \leq \bar{\varepsilon} \quad \wedge \quad |f(y) - L| \leq \bar{\varepsilon}$$

pues $(*)$ funciona para todo valor en $[N_{\bar{\varepsilon}}, \infty)$

Luego
$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - L + L - f(y)| \\
&= |(f(x) - L) + (L - f(y))| \\
&\overset{\text{Triangular}}{\leq} |f(x) - L| + |L - f(y)| \\
&= |f(x) - L| + |f(y) - L| \\
&\leq \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon} \\
&= \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} \\
&= \varepsilon'
\end{aligned}
$$

Luego dado $\varepsilon', \bar{\varepsilon} > 0$ arbitrarios $\forall x, y \in [N_{\bar{\varepsilon}}, \infty)$

Se tendrá que

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon' = \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$$

Sin importar a que distancia se encuentre x e y

$\therefore$ f es uniformemente continua en $[N_{\bar{\varepsilon}}, \infty)$

b) probar que f es uniforme continua en $[0, N_{\bar{\varepsilon}}]$

Notemos que $\bar{\varepsilon} > 0$ es el mismo de la parte a) pues si no lo fuera estaríamos perdiendo control de la ubicación de N_{ε}.

Luego como $\bar{\varepsilon} > 0$ es arbitrario fijo, entonces $N_{\bar{\varepsilon}}$ es fijo (esto es simple de ver)

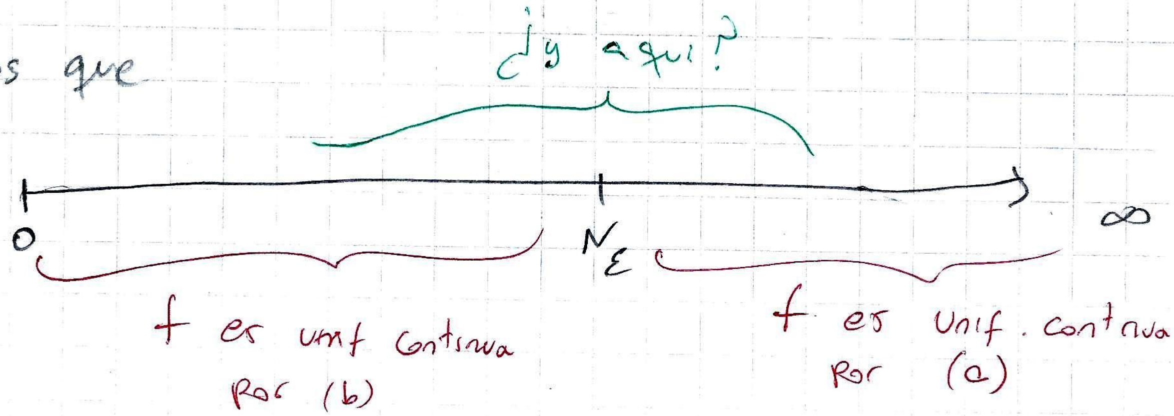
Luego como f es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular es continua en $[0, N_{\varepsilon}]$.

entonces f es continua en un cerrado y acotado

$\therefore$ f es uniforme continua en $[0, N_{\varepsilon}]$

c) Caso faltante...

Tenemos que



Vimos que $\forall x, y \in [0, N_\varepsilon]$ es uniforme continua
y que $\forall x, y \in [N_\varepsilon, \infty)$ ídem

y si $\{x \in [0, N_\varepsilon]$, $y \in [N_\varepsilon, \infty)$ que ocurre?

es decir si $x \leq N_\varepsilon \leq y$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(N_\varepsilon) + f(N_\varepsilon) - f(y)|$$

$$= \underbrace{|f(x) - f(N_\varepsilon)|}_{\text{Unif. continuidad en } [0, N_\varepsilon]} + \underbrace{|f(N_\varepsilon) - f(y)|}_{\text{unif continuidad en } [N_\varepsilon, \infty)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

¿Que delta ocupamos?
¿ δ de $[N_\varepsilon, \infty)$ ó
¿ δ de $[0, N_\varepsilon]$?

Por lo tanto f es uniformemente continua en todo su dominio, es decir en $[0,\infty)$

d) Para esto se hace analogamente a lo recien visto