

MA1002-6 Introducción al Álgebra

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Marcelo Navarro



Auxiliar 3: Derivadas

31 de agosto de 2017

- Diremos que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a, b)$, si existe el limite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

Equivalentemente, f es derivable en \bar{x} si existe $m = f'(\bar{x})$ tal que $f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})$

- Si f es derivable en \bar{x} entonces es continua en \bar{x}
- **[Álgebra de derivadas]** Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces:

1. $f \pm g$ es derivable en \bar{x} con

$$(f \pm g)'(\bar{x}) = f'(x) \pm g'(x)$$

2. $f \cdot g$ es derivable en \bar{x} con

$$(f \cdot g)' = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x})$$

3. Si $g(\bar{x}) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en \bar{x} con

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g^2(\bar{x})}$$

- **[Regla de la cadena]**

Sean $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ y $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en \bar{x} con

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$$

Tambien se puede usar la notación de leibniz obteniendo $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ donde $y = y(u)$ y $u = u(x)$, es decir y depende de u y u depende de x .

- **[Derivada de la función inversa]** Sea $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ con $f'(\bar{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$ con

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}$$

Analogamente $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ donde $y = y(x)$ y $x = x(y)$

- **[Fórmula de Leibnitz]** Para f y g funciones con derivadas de orden n en a , la derivada de orden n de $(f \cdot g)$ está dada por:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

P1. Derive las siguientes funciones

a) $\frac{\sinh(4x)}{\ln(x^2 + 1)}$

b) x^x

c) $\cosh^{-1}(x)$

P2. [Definición de Derivada] Sea la función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} x^n \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudie la diferenciabilidad de ϕ en \mathbb{R} para diferentes valores de n

P3. [Derivada Implícita: 1996 - P2-i) C4]

Encuentre la recta tangente y normal a la curva de ecuación

$$e^{2\arcsen(y \cdot x)} = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

En el punto P donde la curva interseca al eje de las abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva ($x > 0$)

P4. [Derivada n-ésima] Utilizando la derivada de la función $f(x) = x^{2n}$, demuestre que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

P5. [P3 Control 1, Año 2012]

a) Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables que verifican lo siguiente:

$$g(x) = xf(x) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad g(x+y) = g(x)g(y), \quad f(0) = 1$$

1) Demuestre que $g'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2) Demuestre que $\forall n \geq 1, g(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$ y calcule $f^{(n)}(0)$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+x\delta)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$$

existe, es positivo y calcúlelo.

Propuestos

P6. [2006 - C4 - P1]

Considere n reales distintos entre sí, denotados por a_1, \dots, a_n . Se definen las funciones de P y f por

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

$$f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n}$$

Denotamos por $A = \{x \in \mathbb{R} : P(x) \neq 0\}$

a) Probar que $\forall x \in A$ se cumple $f'(x) < 0$

b) Probar que $\forall x \in A$ se cumple $\frac{P'(x)}{P(x)} = f(x)$ y que $P(x)P''(x) < (P'(x))^2$

P7. Sea la función $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen}(x)} & \text{si } x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ c & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Se pide determinar el valor de c de modo que f sea continua $x = 0$

b) Usando la definición de derivada, calcule $f'(0)$

Derivadas conocidas

1. $(c)' = 0$

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

3. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

4. $(\sinh(x))' = \cosh(x)$

5. $(\cosh(x))' = \sinh(x)$

6. $(e^x)' = e^x$

7. $(\sin(x))' = \cos(x)$

8. $(\cos(x))' = -\sin(x)$

9. $(\tan(x))' = \sec(x)^2$

10. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

13. $(a^x)' = a^x \ln(a)$

14. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$