MA1002-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Continuidad vs Continuidad Uniforme en x^2

1. Objetivo

Entender la diferencia entre continuidad y continuidad uniforme, mediante el ejemplo de $f(x) = x^2$ que es continua en todo $\mathbb{R}$ pero no es uniformemente continua.

Antes de leer todo esto les recomiendo ver las siguientes discusiones sobre el tema de continuidad uniforme, en particular ver las dos primeras respuestas de cada pregunta

- Cual es la diferencia geometrica entre continuidad y continuidad uniforme?
- Continuidad uniforme en $\dfrac{1}{x}$

2. Continuidad

Veamos primero que $f(x) = x^2$ es continua en 1, para luego generalizar sobre un $\overline{x} \in \mathbb{R}$ cualquiera.

2.1. Continuidad en 1

Debemos demostrar que $f(x) = x^2$ es continua en 1, notando que $f(1) = 1^2 = 1$.

La proposición, en su forma general, que queremos estudiar es la siguiente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon$$

Donde se tiene que $\overline{x}$ es el punto donde estudiaremos la continuidad, en este caso $\overline{x} = 1$. Para trabajar mejor todo esto, empezaremos a buscar en la tesis de la implicancia candidatos o posibles valores para δ.

Empezemos:

<u>PDQ:</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ es continua en 1. Es decir...

<u>PDQ:</u> $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq \delta \Rightarrow |x^2 - 1| \leq \varepsilon$

[**Idea**] Sea $\varepsilon > 0$ arbitario (con esto cubrimos $\forall \varepsilon > 0$ de lo que debemos probar).
Notemos que

$$|x^2 - 1| = |(x - 1)(x + 1)|$$

Lo que queremos es encontrar cotas para llegar a decir

$$|x^2-1| = |(x-1)(x+1)| \leq \underbrace{\ldots}_{\text{cota}} \leq \underbrace{\ldots}_{\text{cota}} \leq \underbrace{\varepsilon}_{\text{objetivo}}$$

Esto lo podemos lograr con ayuda de que eventualmente nosotros sabremos que hay un $\delta > 0$ tal que $|x-1| \leq \delta$, por lo que podremos usar esto como información anticipada (pues nosotros queremos encontrar el δ, no ocuparlo) para generar cotas.

Sigamos ahora con las dos etapas que hemos mencionado hasta ahora.

- Etapa 1): La idea expresar $|x^2-1| = |x-1| \cdot g(x)$ donde $|x-1|$ es la expresión que sale en la hipotesis de la implicancia a demostrar ($|x-1| \leq \delta$). Para luego usando cotas, eliminar de la expresión el valor de $g(x)$ usando algún valor $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|x-1| \leq \delta \leq c_1$.

- Etapa 2): La idea es continuar acotando. Por la etapa 1, nosotros esperamos lograr que $|x^2-1| = |x-1|g(x) \leq |x-1| \cdot c_2$, donde c_2 es una constante que nos sirvio para acotar. luego de aqui decir que $\delta = \frac{\varepsilon}{c_2}$ y finalmente concluir con $\delta = min\{c_1, \frac{\varepsilon}{c_2}\}$

Notar que a lo largo de todo esto $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario, pues no ocupamos ninguna particularidad de él, solo que $|x-1| \leq \delta$

Apliquemos esto de manera formal. Volvamos al principio y empezemos todo de nuevo ahora que ya tenemos un poco más claro todo.

<u>PDQ:</u> $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq \delta \Rightarrow |x^2-1| \leq \varepsilon$

Demostración. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitario, notemos que

$$|x^2-1| = |(x-1)(x+1)| = |x-1| \underbrace{|x+1|}_{g(x)} \tag{1}$$

Luego, si $\delta \leq 1$ (a mi me dio la gana poner este 1 de aca, perfectamente pueden elegir otro). Tenemos que $|x-1| \leq 1$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned} |x-1| \leq 1 &\iff -1 \leq x-1 \leq 1 && /+2 \\ &\iff (-1)+2 \leq (x-1)+2 \leq (1)+2 \\ &\iff 1 \leq x+1 \leq 3 \\ &\implies |x+1| \leq 3 \end{aligned}$$

Luego encontramos una cota fija para $|x+1|$ por lo que volviendo a (1) se tendrá:

$$|x^2-1| = |(x-1)(x+1)| = |x-1||x+1| \leq |x-1| \cdot 3 \tag{2}$$

(recuerdo: queriamos que $|x^2-1|$ fuera menor que epsilon)

Ahora bien, si $|x-1| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ se tendrá que

$$|x^2-1| = |(x-1)(x+1)| = |x-1||x+1| \leq |x-1| \cdot 3 \leq \frac{\varepsilon}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} = \underbrace{\varepsilon}_{\text{objetivo} \checkmark} \tag{3}$$

Finalmente $f(x) = x^2$ es continua en 1, ya que, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$

$\square$

Si quedaron dudas, revisen lo siguiente ¿como muestro que $f(x) = x^2$ es continua en 1?

2.2. Continuidad en cualquier punto

Ahora probemos que $f(x) = x^2$ es continua en un $\overline{x} \in \mathbb{R}$ arbitrario.

PDQ: Sea $\overline{x} \in \mathbb{R}$ arbitrario. Demostrar que $f(x) = x^2$ es continua en $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Es decir, probar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-\overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |x^2 - \overline{x}^2| \leq \varepsilon$

Demostración. Sigamos la misma idea anterior. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Notemos que

$$|x^2 - \overline{x}^2| = |x-\overline{x}| \cdot |x+\overline{x}|$$

Si $\delta \leq 1$ y notando que $|x+\overline{x}| = |(x-\overline{x})+2\overline{x}| \leq \underbrace{|x-\overline{x}|}_{\leq \delta} + |2\overline{x}|$ lo que implica que $|x+\overline{x}| \leq 1+2|\overline{x}|$.

Volviendo atras.

$$|x^2 - \overline{x}^2| = |x-\overline{x}| \cdot |x+\overline{x}| \leq |x-\overline{x}| \cdot (1+2|\overline{x}|)$$

Si tomamos que $|x-\overline{x}| \leq \frac{\varepsilon}{1+2|\overline{x}|}$ se tiene que

$$|x^2 - \overline{x}^2| = |x-\overline{x}| \cdot |x+\overline{x}| \leq |x-\overline{x}| \cdot (1+2|\overline{x}|) \leq \frac{\varepsilon}{\cancel{1+2|\overline{x}|}} \cdot \cancel{(1+2|\overline{x}|)} = \varepsilon$$

Finalmente $f(x) = x^2$ es continua en cualquier punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$, ya que, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|\overline{x}|}\}$

$\square$

Notar que δ depende del $\overline{x}$ y del ε. Esto hace pensar que la *fuerza* de la continuidad de $f(x) = x^2$ depende netamente del punto $\overline{x}$, esto jamás pasa cuando una función es continuamente uniforme.

2.3. Continuidad Uniforme

Debemos probar que no se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Es decir, la gran diferencia con la continuidad normal es que δ en la continuidad uniforme NO DEPENDE DE DONDE ESTOY PARADO, es decir, NO DEPENDE NI DE x NI DE y.

Pueden notar que cuando uno habla de continuidad uniforme debe ser sobre un conjunto! (esto lo indica $\forall x, y \in \mathbb{R}$) a diferencia de la simple continuidad que puede ser sobre un punto.

Otra cosa que es posible notar, es que en la sección 2.2 la continuidad en $\overline{x}$ tenia ligado un δ que dependía de ε y en particular de $\overline{x}$. por lo que la intuición nos dice que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua.

Dicho todo esto, probemos que no se cumple la continuidad uniforme, es decir debemos probar que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

o bien debemos realizar una contradicción con

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Demostración. Supongamos en busca de una contradicción que $f(x) = x^2$ es uniformemente continua, es decir nuestra información es que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Luego, como sirve para todo ε, podemos tomar $\varepsilon = 1$, como tomamos un valor de ε y supusimos que la proposición es cierta, entonces debe existir $\delta > 0$ (en este momento δ es un valor que podemos manejar) tal que para todo $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$ tal que $|x - y| \leq \delta \implies |x^2 - y^2| \leq 1$.

En particular, para $y = x + \delta$ tenemos que $|x^2 - (x + \delta)^2| = |2x\delta + \delta^2| \leq 1$ para todo valor de x en $\mathbb{R}$. esto es una contradicción pues podemos tomar x enorme y la cota de ≤ 1 no serviría. por ejemplo podemos tomar $x = \dfrac{e^{e^{10}}}{\delta} - \dfrac{\delta}{2}$

$$\begin{aligned}
|2x\delta + \delta^2| &= |2 \cdot (\frac{e^{e^{10}}}{\delta} - \frac{\delta}{2}) \cdot \delta + \delta^2| \\
&= |2 \cdot \frac{e^{e^{10}}}{\cancel{\delta}} \cdot \cancel{\delta} - \cancel{2} \cdot \frac{\delta}{\cancel{2}} \cdot \delta + \delta^2| \\
&= |2 \cdot e^{e^{10}} - \delta^2 + \delta^2| \\
&= |2 \cdot e^{e^{10}}| \\
&\not\leq 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, encontramos una contradicción y con ello x^2 no es uniformemente continua

$\square$

Actualización: revisar ¿Hay alguna otra forma de demostrar continuidad uniforme?

Ahora demostremos de otra forma que x^2 no es uniformente continua, usando sucesiones. para esto veamos lo siguiente

Lema 1. ***(Caract. continuidad uniforme)***

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es uniformemente continua en A si y sólo si

$$\forall (x_n), (y_n) \subseteq A, |x_n - y_n| \to 0 \implies |f(x_n) - f(y_n)| \to 0$$

Donde (x_n) y (y_n) son sucesiones no necesariamente convergentes en A

Demostración. ver Equivalent forms of uniform continuity for a real function □

Probemos que x^2 no es uniformemente continua usando la caracterización por sucesiones.

PDQ: Demostrar que $f(x) = x^2$ no es continua en $\mathbb{R}$.

Demostración. En efecto, sea $x_n = \sqrt{n+1}$, $y_n = \sqrt{n}$ luego

$$0 \leq |x_n - y_n| = |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \left| (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right| = |\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}|$$

y concluyendo por teorema del sándwich se tiene que

$$|x_n - y_n| \to 0 \tag{4}$$

Por otro lado

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2| = |n + 1 - n| = |1| = 1 \tag{5}$$

De esta forma $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$ ya que $|f(x_n) - f(y_n)| \to 1$

Por lo que probamos la existencia de dos sucesiones $(x_n), (y_n)$ en $\mathbb{R}$ tales que $|x_n - y_n| \to 0$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$. Es decir

$$\exists (x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}, |x_n - y_n| \to 0 \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$$

que es justamente la negación de ser uniforme continuo. Por lo tanto $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua. □