Pruebe, por definición $\varepsilon - \delta$, que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es continua.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Queremos ver que f es continua en x_0. Para esto, tenemos que probar que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$$

Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad & \iff \quad |x^3 - x_0^3| \leq \varepsilon \\
& \iff \quad x_0^3 - \varepsilon \leq x^3 \leq x_0^3 + \varepsilon \\
& \iff \quad \sqrt[3]{x_0^3 - \varepsilon} \leq x \leq \sqrt[3]{x_0^3 + \varepsilon} \text{ (pues } \sqrt[3]{x} \text{ es creciente)} \\
& \iff \quad (\sqrt[3]{x_0^3 - \varepsilon} - x_0 \leq x - x_0) \wedge (x - x_0 \leq \sqrt[3]{x_0^3 + \varepsilon} - x_0) \\
& \iff \quad (x_0 - x \leq x_0 - \sqrt[3]{x_0^3 - \varepsilon}) \wedge (x - x_0 \leq \sqrt[3]{x_0^3 + \varepsilon} - x_0)
\end{aligned}$$

Observemos que, si definimos $\delta_1 = \underbrace{\sqrt[3]{x_0^3 + \varepsilon}}_{> x_0} - x_0 > 0$, entonces, para $|x - x_0| \leq \delta_1$, se tiene que:

$$|x - x_0| \leq \delta_1 \Rightarrow (x - x_0) \leq |x - x_0| \leq \delta_1 \Rightarrow x - x_0 \leq \sqrt[3]{x_0^3 + \varepsilon} - x_0$$

Por otra parte, si definimos $\delta_2 = x_0 - \underbrace{\sqrt[3]{x_0^3 - \varepsilon}}_{< x_0} > 0$, entonces, para $|x - x_0| \leq \delta_2$, se tiene que:

$$|x - x_0| \leq \delta_2 \Rightarrow (x_0 - x) \leq |x - x_0| \leq \delta_2 \Rightarrow x_0 - x \leq x_0 - \sqrt[3]{x_0^3 - \varepsilon}$$

Finalmente, definiendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se concluye lo pedido, pues:

$$\begin{aligned}
|x - x_0| \leq \delta \quad & \Rightarrow \quad (|x - x_0| \leq \delta_1) \wedge (|x - x_0| \leq \delta_2) \\
& \Rightarrow \quad (x - x_0 \leq \sqrt[3]{x_0^3 + \varepsilon} - x_0) \wedge (x_0 - x \leq x_0 - \sqrt[3]{x_0^3 - \varepsilon}) \\
& \iff \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$