

Aux #2

P1 Sea $g_n(x) = x^n + x - 1$

a) pda $\forall n \geq 1$, $g_n(x)$ tiene una raíz r_n positiva

Idea: nos piden probar la existencia de una raíz por lo que debemos utilizar T.V.I.

Desarrollo: Sea $n \geq 1$ arbitrario, como $g_n(x) = x^n + x - 1$ es un polinomio, g_n es continua en todo $\mathbb{R}$.

Luego, mediante "inspección" (es decir, búsqueda), podemos notar que

$$\begin{aligned} g_n(0) &= 0^n + 0 - 1 = -1 \\ \text{y } g_n(1) &= 1^n + 1 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Luego $g_n(0)g_n(1) \leq 0$ y g_n es continua

$\Rightarrow$ Por T.V.I., $\exists r_n \in (0, 1)$ tal que $g_n(r_n) = 0$

Donde claramente $r_n > 0 \quad \forall n \geq 1$

b) pda $(r_n)_{n \geq 1}$ tiene una subsucesión convergente

En efecto, esto pide a gritos usar Bolzano-Weierstrass por lo que por la parte a) se tiene que

$$\forall n \geq 1, r_n \in (0, 1)$$

es decir $(r_n)_{n \geq 1}$ es acotada, y por B-W, existe una subsucesión convergente

P2

a) $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continua.
pda f tiene un punto fijo

En efecto, queremos probar que

$$f(x) = x \quad \text{para algun } x \in [0,1]$$

Lo anterior es equivalente a

$$f(x) - x = 0 \quad \text{para algun } x \in [0,1]$$

llamando $g(x) = f(x) - x$, g es continua por
algebra de continuas, el problema se reduce a

$$g(x) = 0 \quad \text{para algun } x \in [0,1]$$

Ahora podemos usar TVI para resolver el problema

Ahora si, en efecto, sea $g(x) = f(x) - x$, donde
 g es continua por algebra de continuas y $g: [0,1] \rightarrow [-1,1]$

obs: notemos que $\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$
 $\Rightarrow \forall x \in [0,1], 0 \leq f(x) \leq 1$

Veamos ahora que

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

luego $g(0)g(1) \leq 0 \Rightarrow \exists \bar{x} \in [0,1] \text{ t.q. } g(\bar{x}) = 0$

es decir, $\exists \bar{x} \in [0,1], f(\bar{x}) = \bar{x}$ $\square$

P2 b) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. p.d.g: $\exists c, d$ t.q $f([a, b]) = [c, d]$

En efecto, como f es continua sobre $[a, b]$, cerrado y acotado, por teorema de Weierstrass f alcanza su máximo y su mínimo. Es decir $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tal que

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

donde $\text{mínimo} := f(x_1)$ y $\text{máximo} := f(x_2)$

Luego, basta con definir $c = f(x_1)$ y $d = f(x_2)$

$$\Rightarrow \forall x \in [a, b], \quad c \leq f(x) \leq d$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b], \quad f(x) \in [c, d]$$

Con esto se tiene que $f([a, b]) \subseteq [c, d]$ $\blacksquare$

Falta ver que $[c, d] \subseteq f([a, b])$

sea $e \in [c, d] \Leftrightarrow \min f(x) \leq e \leq \max f(x)$
Luego por TVI generalizado existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que
 $f(\bar{x}) = e$

$$\Rightarrow e \in f([a, b])$$

$$\Rightarrow [c, d] \subseteq f([a, b]) \quad \blacksquare$$

$$\therefore [c, d] = f([a, b]) \quad \text{con } c := \min f(x) \\ d := \max f(x)$$

c) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\text{pda: } \exists x_0 \in [a, b] \text{ t.q. } f(x_0) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

En efecto, por Weierstrass f alcanza su mínimo y su máximo, digamos m y M respectivamente

$$\Rightarrow \forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$$

Como es $\forall x \in [a, b]$, en particular lo es para $x=a$ y $x=b$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x=a \\ x=b \end{array} \quad \begin{array}{l} m \leq f(a) \leq M \\ m \leq f(b) \leq M \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x=a \\ x=b \end{array}} \right\} \text{ Sumamos}$$

+

$$2m \leq f(a) + f(b) \leq 2M \quad \text{ } \} \text{ dividimos por 2}$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq M$$

Luego $\frac{f(a) + f(b)}{2} \in [m, M] = f([a, b])$ por la parte anterior

Luego por TVI generalizado, $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$

P3 a) $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$

Según f es continua y $\exists! \bar{x} \in \mathbb{R} \quad f(\bar{x}) = 0$

En efecto, f es continua por álgebra y composición de funciones continuas.

• Veamos la existencia de una raíz

Por TVI: $f(0) = -5$
 $f(1) = 1 + 7 - 5 = 3$

Luego $f(0)f(1) \leq 0$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (0, 1) \quad f(\bar{x}) = 0$

• Veamos ahora que es único, esto lo haremos descartando la existencia de más raíces

↳ no hay raíces en $(-\infty, 0)$, ya que dado $x < 0$

$\Rightarrow f(x) = \underbrace{x^{13}}_{< 0} + \underbrace{7x^3}_{< 0} - 5 < 0$

es decir, si x es estric. negativo $\Rightarrow f(x)$ también lo será. Por lo que no hay raíces en $(-\infty, 0)$

↳ no puede haber otra raíz en $[0, \infty)$, ya que f es estrictamente creciente. En efecto

Sea

Sean $x, y \in (0, \infty)$ tales que

$0 < x < y$, estudiemos

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= x^{13} + 7x^3 - 5 - (y^{13} + 7y^3 - 5) \\ &= x^{13} + 7x^3 - \cancel{5} - y^{13} - 7y^3 + \cancel{5} \\ &= x^{13} - y^{13} + 7x^3 - 7y^3 \\ &= x^{13} - y^{13} + 7(x^3 - y^3) \\ &= \underbrace{x^{13} - y^{13}}_{< 0} + 7 \underbrace{(x - y)}_{< 0} \underbrace{(x^2 + xy + y^2)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Como $x < y \Leftrightarrow x - y < 0$

además $\left. \begin{array}{l} x < y \\ \wedge \quad 0 < x < y \\ \vdots \\ \wedge \quad 0 < x < y \end{array} \right\} 13 \text{ veces}$

$$\Rightarrow x^{13} < y^{13} \Rightarrow x^{13} - y^{13} < 0$$

Luego si $0 < x < y \Rightarrow f(x) - f(y) < 0$
 $\Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Por lo que f es estrictamente creciente
Luego no puede volver a pasar por otro cero, $\square$

P3 b) fda $x^3 = 2^x$ tiene solución

En efecto, definimos $g(x) = x^3 - 2^x$

$$g(0) = (0)^3 - 2^{(0)} = 0 - 1 = -1$$

$$g(1) = (1)^3 - 2^{(1)} = 1 - 2 = -1$$

$$g(2) = (2)^3 - 2^{(2)} = 8 - 4 = 4$$

} Tomo estos obs

Luego $g(1) \cdot g(2) \leq 0$ y g es continua por
álgebra de continuas

$\Rightarrow$ por TVI $\exists \bar{x} \in [1, 2]$ tq $g(\bar{x}) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 = 2^x$ tiene solución