MA1002-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 1: Continuidad

11 de agosto de 2017

- Una **sucesión** es una función
$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto s(n) = s_n \end{aligned}$$
- $s_n \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$
- (s_n) se dirá acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi : N \to N$ una función *estrictamente creciente*. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ, a la sucesión $s_{\varphi(n)}$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces
$$s_n \to \ell \iff \textit{Todas las subsucesiones de } (s_n) \textit{ convergen a } \ell$$
- **Teorema de Bolzano - Weiestrass**
Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergete
- **Función continua en un punto**
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\overline{x}$ si
$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \overline{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\overline{x})$$
- **Caracerización** $\varepsilon - \delta$
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. f es continua en $\overline{x}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$
$$\{|x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon\}$$
- **Álgebra de funciones continuas**
Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $\overline{x} \in A \cap B$. Luego $f \pm g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ con $g(\overline{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \overline{x} \in A$, diremos que f es continua.

P1. Calcule los siguientes limites

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)^{3n^2}$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} ((n+1)!)^{\frac{1}{n!}}$

P2. Pruebe que las siguientes sucesiones no convergen:

a) $u_n = sen\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)$

b) $v_n = \left(-1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

P3. Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, con un mínimo global único en el punto $\overline{x}$ y que satisface $\displaystyle \lim_{x\to\pm} f(x) = +\infty$
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que tiene la propiedad
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(\overline{x}) + \frac{1}{n}$$

a) Pruebe que si la subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ entonces $\ell = \overline{x}$

b) Pruebe que (x_n) tiene alguna subsucesión que converge a $\overline{x}$

P4. Una función se denomina función de Lipschitz, si cumple con:

$$\exists L > 0,\ \forall x, y \in Dom(f),\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Demuestre que si f es Lipschitz, entonces es continua

P5. Demuestre usando la caracterización $\varepsilon - \delta$ que

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $x_0 = \frac{1}{2}$

b) $g(x) = 3x^2 + 1$ es continua en $x_0 = 1$

P6. Sean $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ y $b \in \mathbb{R}$. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\left((1-a)x\right)}{x} & si \quad x < 0 \\ b(x-a)^2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{sen\left(a(x-1)\right)}{ln(x)} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) ¿Es f continua en los intervalos $(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$?

b) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 0

c) Encuentre una relación entre a y b de tal forma que f sea continua en 1

d) Encuentre los valores de a y de b de tal forma que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

Propuestos

P1. Sea (x_n) una sucesión tal que las subsucesiones $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ y (x_{3n}) son convergentes. Demuestre que la sucesión (x_n) es convergente.

P2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en 0 y tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(\frac{1}{n}) > 0$. Demuestre que $f(0)$ no puede ser estrictamente negativo

P3. Sea $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función que satisface la relación $h(xy) = h(x) + h(y)$ demuestre que si h es continua en 1, entonces es continua en todo su dominio

P4. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función que satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in (0, \infty)$. Demuestre que si f es continua en 0 entonces f es continua en todo su dominio

P5. Suponga que f y g son funciones tales que g es continua en 0, $g(0) = 0$, y $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo x. Demuestre que f es continua en 0.

P6. Considere la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{sen(\pi x)}{x(x-1)}$. Demuestre que es continua en su dominio y determine si es posible reparar f de modo que sea continua en todo $\mathbb{R}$

P7. El objetivo de este problema es probar que el limite de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, es un número irracional,. Para ello proceda de la siguiente manera.

a) Pruebe que los intervalos $I_n = [S_n, b_n]$, con $b_n = S_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ son encajonados.

b) Sea $\ell = \lim_{n\to\infty} S_n$. Razone por contradicción y concluya lo pedido

Observación: Para probar que $I_n = [S_n, b_n]$ es encajonado, se debe probar que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subseteq I_n$, o equivalentemente puede probar que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq b_n$ y que S_n es creciente y que b_n es decreciente.

P8. Se dice que una sucesión es de Cauchy si verifica la propiedad:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N,\ |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Muestre que las sucesiones que verifican que $|a_n - a_{n+1}| \leq q^n$, con $0 < q < 1$, son de Cauchy.

Propuesto: Muestre que si (x_n) es una sucesión convergente, entonces (x_n) es de cauchy.

P9. [P1.b) C1 2015-2]
Demuestre que si $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es continua y $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ entonces toda sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$ posee al menos una subsucesión $(x_\varphi(n))$ tal que $g(x_\varphi(n))$ converge
Ind: Pruebe previamente que g es acotada y aplique apropiadamente Bolzano-Weierstrass

P10. [P1.b) C1 2015-1]
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea (a_n) una sucesión en $[a, b]$ (no necesariamente convergente) tal que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. Demuestre que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \ell$

P11. [1996 - C4] Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$

a) Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ existe y calcule su valor.

b) Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de f, en los puntos donde $f(x)$ existe

P12. sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{ln(1 + x)} & si \quad x > 0 \\ (x - \alpha)^2 & si \quad x < 0 \\ \beta & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.