MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 10 : Aplicaciones de la Integral y Curvas

17 de octubre del 2017

Recordemos:

- Largo de curva entre a y b:
$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$
- Superficie del manto de un sólido de revolución respecto a OX:
$$A_a^b(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$
- Coordenadas polares:
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
Además:
$$r = x^2 + y^2$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
- Área en coordenadas polares,
$$R = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : \theta \in [a,b], r \in [0, f(\theta)]\}$$
$$A(R) = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\, d\theta$$
- Centro de gravedad/masa:
Dada f su centro de gravedad estará dado por (X_G, Y_G), donde:
$$X_G = \frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}, \qquad Y_G = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$$
- Coordenadas esféricas:
$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta, \qquad z = r\cos\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \varphi = \arctan(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}), \arctan(\frac{y}{x})$$
- Sea Γ una curva. Γ será:
  1. Suave: Si tiene parametrización $\mathcal{C}^1$.
  2. Regular: Si tiene una parametrización $\mathcal{C}^1$ tal que $\|\frac{dr}{dt}\| > 0$.
  3. Simple: Si tiene una parametrización $\mathcal{C}^1$ inyectiva.
  4. Cerrada: Si tiene una parametrización $r : [a,b] \to \Gamma$, $\mathcal{C}^1$ tal $r(a) = r(b)$.
- Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ. La longitud de arco se define por:
$$s(t) = \int_a^t \left\|\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right\| d\tau$$
Notemos entonces que tenemos una reparametrización natural $\sigma(t) = r(s^{-1}(t))$.

P1. [Varios]

a) Calcule el área de la superficie de una esfera de radio R.

b) Sea $r(\theta)$ una curva en coordenadas polares, con $\theta \in [\alpha, \beta]$. Demuestre que el largo de la curva se puede calcular como:
$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho(\theta)^2 + \left(\frac{d}{d\theta}\rho(\theta)\right)^2} d\theta$$
Use esto para calcular el perímetro de un circulo de radio R.

c) Determine el centro de gravedad de la región que la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ encierra en el primer cuadrante.

d) Considere las siguientes curvas en polares $r(\theta) = 2a\cos(3\theta)$, $\rho(\theta) = a$. Halle el área que queda fuera de la curva ρ, pero dentro de r.

P2. [P2 Control 3, Año 2013]

a) Una partícula recorre la curva Γ parametrizada por:

$$r(t) = (3\sin(t), 4t, 3\cos(t)), \qquad t \in [0, \infty)$$

1) Determine el instante t_0 en que la partícula ha recorrido una distancia $s = 10\pi$ sobre Γ e indique el punto de la curva en el que se encuentre la partícula en ese instante.

2) Deduzca la parametrización en longitud de arco s para Γ.

b) Considere la espiral C parametrizada por:

$$r(\theta) = (e^{-2\theta}\cos\theta, e^{-2\theta}\sin\theta)$$

Determine la longitud de la primera espira de C y calcule, si es que existe, la longitud total de C. Fundamente su respuesta.

P3. [Cardioide]

Considere el cardioide de ecuación $r(\theta) = a(1 - \cos\theta)$ en polares.

a) Bosqueje el cardioide.

b) Parametrize el cardiode en coordenadas cartesianas.

c) Exprese el largo total del cardioide como una integral.

P4. [P3 *a*) Control 3, Año 2012]

Calcular la masa de una alambre cuya forma está dada por la curva $r(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 2]$ y cuya densidad en cada punto es $\rho(x, y, z) = 2x + 9z$.