MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 12 : Último de Curvas

31 de octubre del 2017

Curvas:

- Consideremos $f \in \mathcal{C}^1$ y la curva dada por $(t, f(t))$.
- **Largo de curva entre a y b:**

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- **Manto Sólido de Revolución:**

$$A_{OX}\, {}_a^b(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- **Polares:**

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan(y/x)$$

- **Área en polares:**

$$A_\alpha^\beta(f) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta) d\theta$$

- **Centro de Masa:**

$$X_G = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad Y_G = \frac{\int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

- **Esféricas:**

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\varphi = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z), \theta = \arctan(y/x)$$

Curvas Paramétricas:

- Sea Γ una curva simple y regular y $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ.
- **Longitud de Arco:**

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right\| d\tau$$

- **Parametrización Natural:** $\sigma(t) = r(s^{-1}(t))$.
- **Velocidad, rapidez y tangente:**

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t), \quad v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \frac{ds}{dt}(t), \quad \vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}$$

- **Curvatura, radio de curvatura y normal:**

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)}, \quad R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}, \quad N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

- **Binormal y Torsión:** Si $n = 3$.

$$B(t) = T(t) \times N(t), \quad \tau(t) = -N(t) \cdot \left(\frac{B'(t)}{v(t)}\right)$$

- **Frenet**:

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N, \quad \frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B, \quad \frac{dB}{ds} = -\tau N$$

Recordemos además que $\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v(t)}\frac{dT}{dt}$

- **Integral de Linea:**

$$\int_\Gamma f \; dl \doteq \int_a^b f(\vec{r}(t)) v(t) \; dt$$

- **Masa:** Si tenemos densidad lineal $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la masa de la curva está dada por:

$$M = \int_\Gamma \rho \; dl$$

- **Centro de Masa:**

$$x_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho dl, \; y_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho dl, \; z_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma z\rho dl$$

P1. [Dos Circunferencias]

Considere una circunferencia de radio $R > 0$ fija y otra circunferencia de radio $r = \frac{R}{10}$ rodando sin resbalar por el borde exterior de la circunferencia grande. Parametrize la curva generada por un punto de la circunferencia pequeña.

P2. [Frenet]

Sea $\vec{r}$ una parametrización $\mathcal{C}^3$ de una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea s el parámetro de longitud de arco. Demuestre que:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \left[\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right] = \tau\kappa^2$$

P3. [Integrales de Linea]

Sea C la curva definida por la intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z^2 = x^2 + y^2$ y $z \geq 0$. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Calcule $\displaystyle\int_C F\, dl$. ¿Que ocurre si reemplaza $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ y $z^2 = x^2 + y^2$ con $z^2 = x^2 - y^2$?

P4. [Curvas en un Plano]

Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ su parametrización natural. Consideremos el plano $\Pi : Ax + By + Cz = D$.

a) Demuestre que si $\Gamma \subseteq \Pi$, entonces $\tau = 0$.

b) Calcule la torsión de la curva parametrizada por:

$$x(t) = \frac{2t+1}{t-1}, \quad y(t) = \frac{t^2}{t-1}, \quad z(t) = t - 2$$

Hint: *Calcule* $x(t) - 3y(t) + 3z(t)$.

P5. [Hélice]

Consideremos la curva Γ parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

a) Bosqueje la curva anterior.

b) Demuestre que el ángulo que forma la recta tangente con el eje OZ es constante. Calcule el valor de dicho ángulo.

c) Determine $B(t)$.

d) Determine la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto $\vec{r}(t)$ y como directores a $N(t)$ y $T(t)$.

e) Sin calcular nada, conjeture un valor para $\frac{d\tau}{dt}$.

f) Calcule $\tau(t)$. Confirme su conjetura de la parte anterior.

g) **[Propuesto]** Suponga ahora que tiene un alambre de la misma forma de Γ, con densidad lineal dada por $\rho(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$. Calcule la masa total del alambre y su centro de masa.