MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 8 : Teorema Fundamental y Algo de Aplicaciones

10 de octubre del 2017

Recordemos:

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a, b]$, entonces es integrable en $[r, s] \subseteq [a, b]$.
- Si f es integrable en $[p, q]$ y $[r, s]$, entonces f es integrable en $[p, q] \cup [r, s]$.
- Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces si las integrales de algún lado existe se tienen las siguientes igualdades:

  1. $\displaystyle\int_a^b c = c(b - a).$
  2. $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$
  3. $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$
  4. $\displaystyle\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f.$
  5. $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

  Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces:

  $$\int_a^b f \leq \int_a^b f$$

- Si f es una función integrable en $[a, b]$, entonces $G(x) = \int_a^b f$ es continua en $[a, b]$.
- **1^{er} TFC:** Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces la función $G(x) = \int_a^x f$ es derivable en $\operatorname{int}(I)$ y además $G' = f$ en $\operatorname{int}(I)$.
- **Cor. 1^{er} TFC:** Sea F primitiva continua de f en I. Luego:

  $$\int_a^b f = F(b) - F(a), \qquad \forall a, b \in I$$

- **2^{do} TFC:** Sea f integrable en $[a, b]$. Si F es una primitiva continua de f, entonces:

  $$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

- **IPP, versión Riemann:** Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo I y diferenciables en $\operatorname{int}(I)$ Si f' y g' son continuas entonces:

  $$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

- **Sustitución, versión Riemann:** Sea g continua en I y derivable en $\operatorname{int}(I)$, con g' continua. Sean $a, b \in \operatorname{int}(I)$, con $a < b$. Sea f continua en $g([a, b])$, entonces:

  $$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f$$

- **TVM Integral:** Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que:

  $$\frac{1}{b - a}\int_a^b f = f(\xi)$$

- **TVM Integral 2:** Si f es continua en $[a, b]$ y g integrable en $[a, b]$ que no cambia de signo, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que:

  $$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$$

- **Taylor Integral:** Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función $(n + 1)-$veces derivable en el intervalo y $\bar{x} \in (a, b)$. Luego:

  $$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}(x - \bar{x})^k\right) + \int_a^x \frac{f^{[n+1]}(t)}{n!}(x - t)^n dt$$

P1. [Varios]

a) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_x^{x^2} e^{s^2} ds$. Demuestre que F es diferenciable y calcule $F'(x)$.

b) Calcule $\int_0^1 \arctan(x)dx$.

c) Sea f una función integrable en $[-a, a]$. Calcule $\int_{-a}^{a} f$ cuando f es impar y cuando es par.

P2. [Límites]

a) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i 2^{\frac{i}{n}} \right)$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{\int_0^x x f(t)dt}$.

c) Sea $p \in \mathbb{N}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(3n+2i)^p}{n^{p+1}}$.

P3. [P1 Control 2, Año 2016]

a) Considere la función $F(x)$ definida por:

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2 - 2t}{t^2 + 1} dt$$

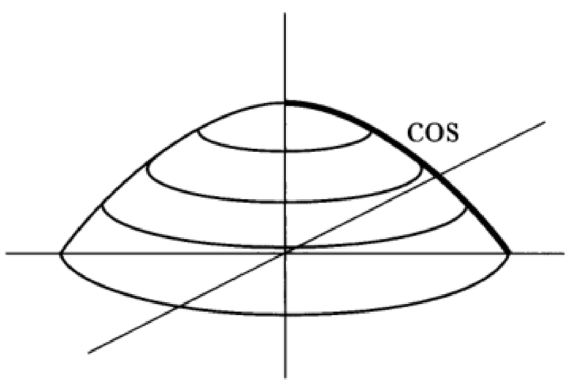
Determine sus máximos, mínimos locales y los valores de F en los máximos y mínimos locales.

b) La función $y = f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación:

$$\int_1^x y(t) \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) dt + \int_0^{y(x)} \sin(\pi t) dt = \frac{1}{2\pi}, \qquad 0 < y < \frac{1}{2}$$

Calcule $y(1)$ e $y'(1)$.

P4. [Volúmenes]



a) Encuentre el volumen del sólido mostrado en la figura mediante el método de la cascara.

b) Encuentre el volumen del sólido mostrado en la figura mediante el método del disco.

P5. [Propuesto: P3 Control 2, Año 2011]

Considere las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas para $x \in [0, \pi]$.

a) Demuestre que $\forall x \in [0, \pi]$, $g(x) \geq f(x)$.
Hint: *Verifique que $g(x) - f(x)$ es una función cóncava y concluya.*

b) Definimos la región R por:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi] \ \wedge \ y \in [f(x), g(x)]\}$$

se pide calcular el área de R y calcular los volúmenes de los sólidos engendrados por la rotación de R en torno al eje OX y el eje OY.