MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 2 : Propiedades de las funciones continuas

16 de agosto del 2017

P1. [Varios]

a) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Demuestre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$. Demuestre que g no es uniformemente continua.

c) Sea $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x\sin(1/x)$. Demuestre que h es uniformemente continua.
Hint: Extiéndala a una función continua en $[0,1]$ *primero.*

d) Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Demuestre que existe $\lambda > 0$ tal que $f(x) > g(x) + \lambda$ para todo $x \in [a,b]$. ¿Es cierto el resultado si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Solución 1.

a) Definamos $\phi : [0,1] \to [-1,1]$ como $\phi(x) = f(x) - x$. Notemos que:

$$\phi(0)\phi(1) = \underbrace{(f(0)-0)}_{\geq 0}\underbrace{(f(1)-1)}_{\leq 0} \leq 0$$

De esto existe $c \in [0,1]$ tal que $\phi(c) = f(c) - c = 0$, por tanto existe c tal que $f(c) = c$.

b) Supongamos en busca de una contradicción que g es uniformemente continua , luego para $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |x^2 - \bar{x}^2| \leq 1$.
En particular para $x = \bar{x} + \delta$ tenemos que $|(\bar{x}+\delta)^2 - \bar{x}^2| = |2\bar{x}\delta + \delta^2| \leq 1$ para todo $\bar{x}$, esto es una contradicción pues podemos tomar $\bar{x}$ enorme.

c) Definamos $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ como:

$$\phi(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Notemos que ϕ es continua en $(0,1]$ por álgebra y composición de continuas. Sea además $(x_n) \subseteq [0,1]$ tal que $x_n \to 0$, notemos que:

$$0 \leq |\phi(x_n)| \leq |x_n| \implies \lim |\phi(x_n)| = 0$$

De esto $\phi(x_n) \to 0 = \phi(0)$ y por tanto ϕ es continua en $[0,1]$. Por lo anterior ϕ es uniformente continua en $[0,1]$ y por tanto uniformemente continua en $(0,1)$ (es decir h es uniformemente continua).

d) Notemos que $\phi(x) = f(x) - g(x)$ es continua en $[a,b]$, luego alcanza su minimo en $[a,b]$, es decir existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$f(x) - g(x) \geq f(c) - g(c), \quad \forall x \in [a,b]$$

Definamos entonces $\lambda = \frac{f(c)-g(c)}{2} > 0$, notemos que:

$$f(x) \geq g(x) + \underbrace{f(c) - g(c)}_{>0} > g(x) + \frac{f(c)-g(c)}{2} = g(x) + \lambda$$

Lo anterior era lo pedido.

P2. [P2 a) Control 1, Año 2016]
Sean f, g, h las funciones definidas por:

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor, \quad g(x) = \sin(\pi f(x)), \quad h(x) = \cos(\pi f(x))$$

a) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $[0, 1)$.

Solución 2.

a) Notemos que f, g y h son $1-$periódicas, luego basta con que analicemos el intervalo $[0, 1]$. Notemos por composición y álgebra de continuas tenemos que tanto f, g y h son continuas en $(0, 1)$. Veamos si g es continua en 0.

$$\lim_{x\to 0^-} \sin(\pi(x - \lfloor x \rfloor)) = \sin\left(\pi \lim_{x\to 0^-} (x - \lfloor x \rfloor)\right) = \sin(\pi) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(\pi(x - \lfloor x \rfloor)) = \sin\left(\pi \lim_{x\to 0^+} (x - \lfloor x \rfloor)\right) = \sin(0) = 1$$

De donde es continua en 0, luego por 1-periodicidad es continua en 1, por tanto es continua (y uniformemente continua) en $[0, 1]$. La $1 - \textit{periodicidad}$ nos da uniforme continuidad en $\mathbb{R}$.

Veamos si h es continua en 0.

$$\lim_{x\to 0^-} \cos(\pi(x - \lfloor x \rfloor)) = \cos\left(\pi \lim_{x\to 0^-} (x - \lfloor x \rfloor)\right) = \cos(\pi) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \cos(\pi(x - \lfloor x \rfloor)) = \cos\left(\pi \lim_{x\to 0^+} (x - \lfloor x \rfloor)\right) = \cos(0) = 1$$

De donde tenemos que h no es ni continua ni uniforme continua.

b) Sólo hay que analizar h (pues g es continua y uniforme continua en el intervalo mencionado). Notemos que $h(x) = \cos(\pi x)$ en el intervalo $[0, 1)$. Notemos que la función $\cos(\pi x)$ es (uniforme) continua en $[0, 1]$ y por tanto $h(x)$ es continua y uniforme continua en $[0, 1)$.

P3. [TVI]

a) Demuestre que la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene solución.

b) Sean $f, g : [0,1] \to [0,1]$ dos funciones continuas tal que f es sobreyectiva. Demuestre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = g(c)$.

c) Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $h(0) = h(1)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, demuestre que existe c tal que:

$$h(c) = h\left(c + \frac{1}{n}\right)$$

d) Demuestre que no existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que para cada $a \in \mathbb{R}$ existen exactamente dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ que verifican $f(x) = f(y) = a$.

Solución 3.

a) Definamos $\phi(x) = 2^x - x^3$ (continua). Notemos que:

$$\phi(0)\phi(2) = (2^0 - 0^3)(2^2 - 2^3) = -4 \leq 0$$

Por TVI existe $c \in [0,2]$ tal que $\phi(c) = 2^c - c^3 = 0$ y por tanto existe solución a la ecuación.

b) Notemos que como f es sobreyectiva, entonces existen $a, b \in [0,1]$ tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$. Sea $\phi(x) = f(x) - g(x)$, notemos que ϕ es continua:

$$\phi(a)\phi(b) = (f(a) - g(a))(f(b) - g(b)) = -g(a)\underbrace{(1 - g(b))}_{\geq 0} \leq 0$$

Por TVI existe $c \in [0,1]$ tal que $\phi(c) = f(c) - g(c) = 0$ que era lo buscado.

c) Supongamos en busca de una contradicción que $\phi(x) = h(x) - h(x + 1/n) \neq 0$ para todo $x \in [0, 1 - 1/n]$ (notemos que ϕ es continua). Notemos que en dicho caso $\phi(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1 - 1/n]$ o $\phi(x) < 0$ para todo $x \in [0, 1 - 1/n]$ (sino existe c tal que $\phi(c) = 0$ por el TVI). Pongamonos en casos:

- **Caso 1:** ($\phi(x) > 0$ para todo x)
  En este caso $h(x) > h(x + 1/n)$ para todo x, evaluando la desigualdad tenemos:

  $$h(0) > h(1/n) > h(2/n) > \ldots > h(n/n) = h(1)$$

  En este caso $h(0) > h(1)$ lo que es una contradicción.
- **Caso 2:** ($\phi(x) < 0$ para todo x)
  En este caso $h(x) < h(x + 1/n)$ para todo x, evaluando la desigualdad tenemos:

  $$h(0) < h(1/n) < h(2/n) < \ldots < h(n/n) = h(1)$$

  En este caso $h(0) < h(1)$ lo que es una contradicción.

d) Supongamos existe una función f con esa propiedad. Luego existen exactamente dos puntos $a_0 < a_1$ tal que $f(a_0) = f(a_1) = 0$. Notemos que $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ en $[a_0, a_1]$ (sino encontrariamos un tercer punto que evaluado en f da 0).

- **Caso 1:** ($f(x) > 0$ para todo $x \in [a_0, a_1]$)
  Notemos que f alcanza su máximo en el intervalo $[a_0, a_1]$, digamos lo alcanza en $c \in [a_0, a_1]$ tal que $f(c) > 0$. Notemos que el TVI (en versión general) nos dice que existe $b_0 \in (a_0, c)$ tal que $f(b_0) = f(c)/2$, además existe $b_1 \in (c, a_1)$ tal que $f(b_1) = f(c)/2$. Por último notemos que existe un punto x_0 tal que $f(x_0) = f(c) + 1$. Notemos que este punto debe estar afuera del intervalo $[a_0, a_1]$.
  - **Subcaso 1.1:** $x_0 \in (a_1, \infty)$
    Notemos que $f(a_1) = 0$ y $f(x_0) = f(c) + 1$, luego existe $b_2 \in (a_1, x_0)$ tal que $f(b_2) = f(c)/2$. De esto $f(b_0) = f(b_1) = f(b_2)$ lo que es una contradicción.

- **Subcaso 1.2:** $x_0 \in (-\infty, a_0)$ Notemos que $f(a_0) = 0$ y $f(x_0) = f(c) + 1$, luego existe $b_2 \in (x_0, a_0)$ tal que $f(b_2) = f(c)/2$. De esto $f(b_0) = f(b_1) = f(b_2)$ lo que es una contradicción.

- **Caso 2:** $(f(x) < 0$ para todo $x \in [a_0, a_1])$
  Análogo, tener cuidado que los máximos cambian por mínimos y cosas así.

Obs: Hacer un dibujo de lo que está ocurriendo ayuda harto a entender esta situación.

P4. [Funciones dominadas por polinomios]

Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0$.

a) Demuestre que si n es impar, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c^n + \phi(c) = 0$.

b) Demuestre que si n es par, entonces la función $f(x) = x^n + \phi(x)$ tiene mínimo global.

Solución 4.

a) Como $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0$, tenemos que para $\varepsilon = 1/2$, existe $R^+ > 0$ tal que para $x > R^+ \implies |\frac{\phi(x)}{x^n} - 0| \leq 1/2$. Podemos elegir entonces $b > 0$ suficientemente grande tal que $|\frac{\phi(x)}{x^n}| \leq 1/2$. Luego si $f(x) = x^n + \phi(x)$:

$$f(b) = b^n + \phi(b) = b^n(1 + \underbrace{\frac{\phi(b)}{b^n}}_{\geq -1/2}) \geq \frac{b^n}{2} \geq 0$$

Por otro lado como $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0$, tenemos que para $\varepsilon = 1$, existe $R^- < 0$ tal que para $x < R^- \implies |\frac{\phi(x)}{x^n} - 0| \leq 1$. Podemos elegir entonces $a < 0$ suficientemente negativo tal que $|\frac{\phi(x)}{x^n}| \leq 1$. Luego:

$$f(a) = a^n + \phi(a) = a^n(1 + \underbrace{\frac{\phi(a)}{a^n}}_{\leq 1}) \leq 2a^n \leq 0$$

De esto tenemos que $f(a)f(b) \leq 0$ y por tanto existe c tal que $f(c) = c^n + \phi(c) = 0$.

b) Como $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0$, tenemos que para $\varepsilon = 1/2$, existe $R^+ > 0$ tal que para $x > R^+ \implies |\frac{\phi(x)}{x^n} - 0| \leq 1/2$. De la misma manera como $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0$, tenemos que para $\varepsilon = 1/2$, existe $R^- < 0$ tal que para $x < R^- \implies |\frac{\phi(x)}{x^n} - 0| \leq 1/2$.
Notemos que además sin perdida de generalidad podemos elegir R^+ y R^- de manera que $(R^+)^n \geq 2\phi(0)$ y $(R^-)^n \geq 2\phi(0)$ (esto se puede hacer pues aumentar sus valores absolutos no afecta la propiedad anterior). Además $f(x) = \phi(x) + x^n$ tiene minimo en $[R^-, R^+]$, es decir existe $c \in [R^-, R^+]$ tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in [R^-, R^+]$, veamos que este minimo sirve para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in (R^+, \infty)$ tenemos que:

$$f(x) = x^n + \phi(x) = x^n(1 + \underbrace{\frac{\phi(x)}{x^n}}_{\geq -1/2}) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{(R^+)^n}{2} \geq \frac{f(0)}{2} \geq \phi(0) = f(0) \geq f(c)$$

- Si $x \in (\infty, R^-)$ tenemos que:

$$f(x) = x^n + \phi(x) = x^n(1 + \underbrace{\frac{\phi(x)}{x^n}}_{\geq -1/2}) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{(R^-)^2}{2} \geq \frac{f(0)}{2} \geq \phi(0) = f(0) \geq f(c)$$

De esto tenemos que c es mínimo global

P5. [P1 *a*) Control 1, Año 2016 + P1 *b*) Control 1, Año 2015]

a) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función. Diremos que $\bar{x}$ es un punto fijo de f si $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Considere la siguiente familia de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ por $f_n(x) = \cos^n(x)$.

(i) Pruebe que cada f_n tiene al menos un punto fijo.

(ii) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que x_n es un punto fijo de f_n. Pruebe que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene al menos una subsucesión convergente.

b) Demuestre que si $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es continua y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, entonces toda sucesión (x_n) de reales posee una subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ tal que $g(x_\varphi(n))$ converge.
Hint: Utilice el teorema de Bolzano-Weiestrass.

Solución 5.

a) (i) Definamos $\phi_n(x) = \cos^n(x) - x$. Notemos que:

$$\phi_n(0)\phi_n(\pi) = (\cos^n(0) - 0)(\cos^n(\pi) - \pi) = (1^n - 0)(1^n - \pi) = -\pi \leq 0$$

Por el TVI existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_n(c) = f_n(c) - c = 0$, por tanto existe un punto fijo de f_n.

(ii) Notemos que de la parte anterior sabemos que ϕ_n cambia de signo entre 0 y π, esto nos dice que los puntos fijos se encuentran en el intervalo $[0, \pi]$ por tanto (x_n) es una sucesión acotada y por el teorema de Bolzano Weierstrass tiene subsucesión convergente.

b) Notemos que como $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ para $\varepsilon = 1$, $\exists R^+ > 0$ tal que $x > R^+ \implies |g(x) - 0| < 1$. Como $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ para $\varepsilon = 1$, $\exists R^- < 0$ tal que $x > R^- \implies |g(x) - 0| < 1$. Notemos que esto nos dice que los conjuntos $\{g(x) : x > R_+\}$ y $\{g(x) : x < R_-\}$ son acotados, es decir, sólo nos falta controlar el conjunto $\{g(x) : x \leq R_+ \wedge x \geq R_-\}$ (pues $g(\mathbb{R})$ es la unión de esos tres conjuntos) para controlar toda la imagen. Analicemos este conjunto, $\{g(x) : x \leq R_+ \wedge x \geq R_-\} = g([R^-, R^+])$, como $[R^-, R^+]$ es un intervalo cerrado g posee un máximo y un minimo en dicho intervalo y por tanto $g([R^-, R^+])$ es acotado.

Como $\{g(x) : x \leq R_+ \wedge x \geq R_-\}$ es acotado tenemos que $g(\mathbb{R})$ también lo es, de donde posee la subsucesión convergente que buscabamos.