MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 2 : Propiedades de las funciones continuas

16 de agosto del 2017

Recordemos:

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.
- **Teo. del Valor Intermedio:** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $l, u \in f([a,b])$. Entonces para todo $e \in \mathbb{R}$ tal que $l \leq e \leq u$ existe $c \in [a,b]$ tal que $f(e) = c$.
- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y máximo en $[a,b]$.
- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente monótona e I un intervalo. Entonces $f(I)$ es un intervalo y $f^{-1} : J \to I$ es continua.
- Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dirá *uniformemente continua* si $\forall \varepsilon$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x, y \in A$ se verifica:
$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
- Toda función uniformemente continua es continua.
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A un conjunto cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y sólo si es continua.

P1. [Varios]

a) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Demuestre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$. Demuestre que g no es uniformemente continua.

c) Sea $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x \sin(1/x)$. Demuestre que h es uniformemente continua.
Hint: Extiéndala a una función continua en $[0,1]$ *primero.*

d) Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Demuestre que existe $\lambda > 0$ tal que $f(x) > g(x) + \lambda$ para todo $x \in [a,b]$. ¿Es cierto el resultado si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

P2. [P2 *a)* Control 1, Año 2016]
Sean f, g, h las funciones definidas por:

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor, \quad g(x) = \sin(\pi f(x)), \quad h(x) = \cos(\pi f(x))$$

a) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $[0,1)$.

P3. [TVI]

a) Demuestre que la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene solución.

b) Sean $f, g : [0,1] \to [0,1]$ dos funciones continuas tal que f es sobreyectiva. Demuestre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = g(c)$.

c) Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $h(0) = h(1)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, demuestre que existe c tal que:

$$h(c) = h\left(c + \frac{1}{n}\right)$$

d) Demuestre que no existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que para cada $a \in \mathbb{R}$ existen exactamente dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ que verifican $f(x) = f(y) = a$.

P4. [Funciones dominadas por polinomios]

Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0$.

a) Demuestre que si n es impar, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c^n + \phi(c) = 0$.

b) Demuestre que si n es par, entonces la función $f(x) = x^n + \phi(x)$ tiene mínimo global.

P5. [P1 *a*) Control 1, Año 2016 + P1 *b*) Control 1, Año 2015]

a) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función. Diremos que $\bar{x}$ es un punto fijo de f si $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Considere la siguiente familia de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ por $f_n(x) = \cos^n(x)$.

(i) Pruebe que cada f_n tiene al menos un punto fijo.

(ii) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que x_n es un punto fijo de f_n. Pruebe que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene al menos una subsucesión convergente.

b) Demuestre que si $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es continua y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, entonces toda sucesión (x_n) de reales posee una subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ tal que $g(x_\varphi(n))$ converge.
Hint: Utilice el teorema de Bolzano-Weiestrass.