MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 1 : Sucesiones y Continuidad

8 de agosto del 2017

Recordemos:

- Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una función estrictamente creciente, diremos que la sucesión $u_n = s_{f(n)}$ es una subsucesión de (s_n).
- Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $l\in\mathbb{R}$, entonces:
  $$s_n \to l \iff \text{toda subsucesión de } (s_n) \text{ converge a } l$$
- **Teo. de Bolzano-Weierstrass** Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.
- Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\bar{x}\in A$. Diremos que f es *continua en* $\bar{x}$ si para toda sucesión (x_n) tal que $x_n\to\bar{x}$ se verifica que $f(x_n)\to f(\bar{x})$.
- Sean $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g: B\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x}\in A\cap B$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. Las siguientes funciones también son continuas en $\bar{x}$:
  $$f+g,\quad f-g,\quad \lambda f,\quad fg$$
  Si $g(\bar{x})\neq 0$, entonces f/g también es continua en $\bar{x}$.
- Sean $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g: B\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x}\in A$ y $f(\bar{x})\in B$ respectivamente, luego $g\circ f$ es continua en $\bar{x}$.
- Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\bar{x}\in A$. Luego f es continua en $\bar{x}$ si y sólo si $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in A$ se verifica:
  $$|x-\bar{x}|\leq\delta \implies |f(x)-f(\bar{x})|\leq\epsilon$$
  (esto último equivale a $\lim\limits_{x\to\bar{x}} = f(\bar{x})$).
- Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Si f es continua para todo $x\in A$, diremos que f es continua.

P1. [Función por partes]

Sea $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ y $b\in\mathbb{R}$. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin((1-a)x)}{x} & \text{si } x<0 \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ \frac{\sin(a(x-1))}{\log(x)} & \text{si } 1<x \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en los intervalos $(-\infty,0)$, $(0,1)$ y $(1,\infty)$.

b) ¿Que condiciones deben satisfacer a y b para que f sea continua en 0?

c) ¿Que condiciones deben satisfacer a y b para que f sea continua en 1?

d) ¿Que condiciones deben satisfacer a y b para que f sea continua?

P2. [Continuidad por $\varepsilon-\delta$]
Demuestre que $f(x)=x^2$ es continua mediante la definición $\varepsilon-\delta$

P3. [Sucesiones y Subsucesiones]

a) Considere la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$s_n = \begin{cases} ns_{n-1} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sin(n)s_{n-2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Con condiciones iniciales $s_0=s_1=1$. Demuestre que s_n tiene una subsucesión convergente.

b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y (x_n) una sucesión tal que $f(x_n) \to \bar{y}$. Demuestre que $\exists \bar{x} \in [a,b]$ tal que $f(\bar{x}) = y$.

Obs: Ojo que (x_n) no necesariamente es convergente.

c) Sea x_n una sucesión tal que las subsucesiones x_{2n}, x_{2n+1} y x_{3n} son convergentes. Demuestre que x_n es convergente.

P4. [Propiedades que implican continuidad]

a) Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función que para todo $x, y \in \mathbb{R}_+$ satisface $f(xy) = f(x) + f(y)$. Demuestre que si f es continua en 1, entonces lo es en todo su dominio.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función *Lipchitz*, esto es, que existe $L > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Demuestre que f es continua.

c) Suponga que f y g son dos funciones tal que g es continua en 0, $g(0) = 0$ y $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demuestre que f es continua en 0.

P5. [Una función aditiva]

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y *aditiva*, esto es:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Demuestre que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$.

Hint: Demuestre que $f(x) = xf(1)$ para $x \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ (en ese orden).

P6. [Extra - Completitud]

Una sucesión se dirá de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq N$ se verifica $|s_n - s_m| \leq \varepsilon$.

El objetivo de este problema será probar que una sucesión es de Cauchy si y sólo si es convergente.

a) Demuestre que una sucesión convergente es de Cauchy.

b) Demuestre que las sucesiones de Cauchy son acotadas.

c) Demuestre que si una sucesión de Cauchy tiene subsucesión convergente, entonces la sucesión converge.

d) Concluya que las sucesiones de Cauchy son convergentes.