



Clase auxiliar # 8

Series de tiempo: estabilidad y modelos dinámicos

¡Recordar!

- Autocorrelación de orden k : $\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{DS(Y_t)DS(Y_{t-k})}$.

- Proceso AR(p)

- Forma escalar: $Y_t = \sum_{i=1}^p \rho_i Y_{t-i} + U_t$

- Forma matricial:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \end{pmatrix}}_{\mathcal{Y}_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} & \rho_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{pmatrix}}_{\mathcal{Y}_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} U_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{U}_t}$$

- Estabilidad

- AR(1): $|\rho_1| < 1$.
- AR(p): $|\lambda_j| < 1 \forall j$, donde λ_j son los valores propios de la matriz P .

- Estacionariedad

- Fuerte: $f(Y_t, \dots, Y_{t-k}) = f(Y_{t-j}, \dots, Y_{t-k-j}) \forall k, j \in \mathbb{Z}$
- Débil: $\mathbb{E}(Y_t|t)$, $\mathbb{V}(Y_t|t)$ y $Cov(Y_t, Y_{t-k}|t)$ no son funciones de $t \forall t, k$.

- Estacionalidad: existencia de patrones estacionales (repetitivos) en los datos observados.

- Impactos en modelos dinámicos:

- Horizonte finito o corto plazo: $\sum_{j=0}^J \frac{\partial \mathbb{E}(y_t | x_t, x_{t-1}, \dots)}{\partial x_{t-j}}$.
- Impactos permanentes: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial \mathbb{E}(y_t | x_t, x_{t-1}, \dots)}{\partial x_{t-j}}$

1. Demostraciones

Demuestre que en un modelo AR(1) estable donde el coeficiente asociado al primer rezago es ρ_1 y los errores son ruidos blancos no autocorrelacionados de varianza σ^2 se cumplen las siguientes propiedades:

- $\mathbb{E}(Y_t) = 0$
- $\mathbb{V}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\rho_1^2}$
- Demuestre que en un modelo AR(1) ($y_t = \beta x_t + u_t$) la autocorrelación de los errores ($u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$) equivale a una especificación dinámica incompleta (omisión de rezagos de x e y).

2. Estabilidad en AR(2)

Considere el proceso AR(2) de la forma $Y_t = 5Y_{t-1} - 6Y_{t-2} + U_t$.

1. Escriba dicho proceso de forma matricial
2. Encuentre los valores y vectores propios de la matriz P .
3. Muestre cómo sería la descomposición espectral de la matriz P .
4. Señale si el proceso es o no estable y explique por qué.

3. Modelo dinámico

Para este problema utilizaremos la base de datos contenida en el archivo Auxiliar 08 - BD Modelo Dinámico.xlsx y consideraremos el siguiente modelo:

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \alpha_0 x_t + \alpha_1 x_{t-1} + u_t$$

1. Estime este modelo mediante *Stata*.
2. Utilizando operadores de rezago, calcule el impacto del aumento permanente de la variable x sobre el valor esperado de la variable y .