DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE
Curso : IN3701, Optimización y Modelos
Semestre : Primavera 2016
Profesores : Felipe Carrasco, Fernando Ordóñez
Auxiliares : Cristian Aguayo, Javier Cembrano, Azucena Orellana, Macarena Osorio

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Tarea C1

P1

Como una persona organizada, usted decide optimizar las 5 peliculas que verá en el próximo festival de cine internacional en su ciudad. En este festival se mostarán un conjunto $I = \{1, \dots n\}$ de películas en un conjunto $J = \{1, \dots m\}$ de salas distintas en los horarios $H = \{1, \dots, T\}$. Estos horarios se extienden por 7 días, donde $H = \cup_{d=1}^{7} H_d$ y H_d son los horarios del día d.

La cantidad p_{ijt} es el beneficio que le da ver la película i en la sala j en el horario t.

1. Formule un problema de optimización lineal con variables enteras que determine cuales deben ser las 5 películas que verá de forma de maximizar el beneficio.
2. Modifique el problema anterior si ahora toma en cuenta que el tiempo de viaje entre salas de cine que hace infactible asistir algunas peliculas en salas consecutivamente. Es decir, sea $E \subset J \times J$ el conjunto de pares de salas que no se pueden ver consecutivamente. Entonces, si $(i, j) \in E$ no es posible ver una pelicula en i en horario t y otra en j en horario $t + 1$ en el mismo día.
3. Modifique el problema anterior de forma que se minimice el número de dias para ver 5 peliculas distintas.

P2

Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de n vertices y E es el conjunto de m aristas entre estos vertices. Se define un matching (emparejamiento) a un subconjunto de aristas $M \subseteq E$ tal que no hay dos aristas en M que coincidan en un mismo vertice. Tambien se define un covering (covertura) un subconjunto de vertices $R \subset V$ tal que cualquier arista en E incide en algún vertice de R.

1. Muestre que para cualquier matching M y cualquier covering R de $G = (V, E)$ se tiene que $|M| \leq |R|$.

   Suponga ahora que G es un grafo bipartito. Es decir $V = V_1 \cup V_2$ y $E \subset V_1 \times V_2$, es decir todas las aristas conectan vertices en V_1 y vertices en V_2.
2. Muestre en un ejemplo de grafo bipartito que existe un matching M y un cover R tal que $|M| = |R|$.
3. Muestre que esto ($|M| = |R|$) no es necesariamente cierto si el grafo no es bipartito.

P3

1. Considere el problema

$$\begin{aligned} v^* = \max \quad & c^\top x \\ \text{s.a.} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1 \dots m \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

   y dado $u \in \Re^m$ defina

$$\begin{aligned} v_2^* = \max \quad & c^\top x \\ \text{s.a.} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}\right) x_j = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \\ & x_i \in \{0, 1\}\ . \end{aligned}$$

Muestre que el segundo problema es una relajación del primero para cualquier u, es decir $v_2^* \geq v^*$.

2. Describa las soluciones básicas factibles para el siguiente politopo para los distintos valores de k

$$\left\{ x \in \Re^n \mid 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1 \ldots n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = k \right\}$$

P4

Dado un polihedro $P = \{x \in \Re^n \mid Ax \geq b\}$ con $A \in \Re^{m \times n}$ y $b \in \Re^m$. Sea $x^* \in P$.

1. Demuestre que si x^* es un vertice de $P \Rightarrow x^*$ es un punto extremo de P.
2. Demuestre que si x^* no es una solución basica factible de $P \quad \Rightarrow x^*$ no es punto extremo de P.
3. Demuestre que si x^* es una solución basica factible de $P \quad \Rightarrow x^*$ es un vertice de P.

P5

Considere el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0\ . \end{array}$$

1. Dibuje la región factible de este PL.
2. Determine el óptimo de este problema.
3. Modifique la función objetivo de forma que cambie la cantidad de soluciones óptimas.
4. Determine todas las soluciones basicas del problema. Cuales de ellas son soluciones factibles? Verifique su respuesta dibujando la región factible con sus soluciones basicas (factibles).