GF4002 Auxiliar 9. Solución

Intro

La energía calorífica se transmite desde las zonas de alta temperatura a las de baja temperatura, en un proceso que vaacompañado de un cambio de entropía hasta que se alcanza, si es posible, el estado de equilibrio térmico caracterizado por una distribución uniforme de temperaturas. Denominamos calor a la transferencia de energía que tiene lugar sin un movimiento ordenado del sistema, en contraposición a la transferencia de energía que tiene lugar con un movimiento ordenado durante la realización de un trabajo mecánico.

La Termodinámica de los procesos reversibles estudia la transferencia de energía en éstos, pero siempre a lo largo de una sucesión de estados de equilibrio. Sin embargo, en un proceso de intercambio de calor entre cuerpos a distintas temperaturas, en tanto se mantenga una diferencia finita de temperaturas entre los mismos habrá un flujo irreversible de calor entre dichos cuerpos y no tendremos estados de equilibrio. Sin embargo, sí podemos tener estados en los que las variables macroscópicas del sistema no cambian con el tiempo, pero que no corresponden a estados de equilibrio sino a estados estacionarios en los que se mantienen constantes las temperaturas de los distintos cuerpos involucrados y el flujo de calor entre ellos. También podemos tener situaciones en las que el sistema está evolucionando con el tiempo y ni siquiera tenemos estados estacionarios.

La transmisión del calor tiene lugar por tres mecanismos básicos:

Conducción: La energía calorífica se transmite durante el contacto directo entre cuerpos (o partes de los mismos) a distintas temperaturas y tiene lugar mediante choques o acoplamientos entre las moléculas del sistema (unas en zonas más calientes, con mayor energía térmica y otras en las zonas más frías, con menor energía térmica), aunque no haya un movimiento macroscópico de las moléculas,o el material sea transparente a la radiación. Este proceso es de gran importancia en sólidos, pero de menor importancia en líquidos y gases, donde normalmente aparece combinado con la convección y es prácticamente enmascarado por ésta.

Convección: La energía calorífica se transmite por el movimiento físico de moléculas “calientes” de las zonas de alta temperatura a las zonas de baja temperatura y viceversa, equilibrándose las temperaturas. Este proceso tiene gran importancia en fluidos y también es denominado conducción superficial, ya que el flujo de calor entre la superficie de un material y un fluido está relacionado con la conducción a través de una fina capa del fluido que se encuentra junto a la superficie. Además, es este proceso de conducción superficial el que provoca, en un fluido inicialmente en reposo en contacto con una superficie a distinta temperatura, una diferencia de temperaturas en el fluido, originándose diferencias de densidad en el mismo que producirán a su vez un desplazamiento físico de materia a distintas temperaturas de unas zonas a otras, teniéndose convección (en este caso natural).

La transferencia de calor por convección puede ser forzada cuando está ayudada por el movimiento de las superficies en contacto con el fluido o libre (llamada también natural) cuando se produce únicamente en virtud de una diferencia de densidades causada por una diferencia de temperaturas. También puede venir acompañada de un cambio de fase, como ocurre durante la condensación o la ebullición, con unos intercambios de calor muy intensos.

Radiación: La energía calorífica se transmite en forma de energía de la radiación electromagnética, emitida por todos los cuerpos por el hecho de encontrarse a una temperatura T , y que se propaga a la velocidad de la luz (porque es luz de distintas longitudes de onda) y puede ser absorbida por los cuerpos, aumentando su temperatura.

La radiación es el único medio de transmisión del calor cuando ésta tiene lugar a través del vacío, y puede ser muy importante para altas temperaturas.

Estos mecanismos básicos actuarán de forma combinada, no sólo para dar la temperatura final del recinto que estamos estudiando, sino en combinación con otros elementos como la humedad del aire, para dar el grado de comodidad o confort del ser humano en el espacio considerado. Así, mayores o menores grados de humedad darán lugar a una sensación de comodidad mayor o menor para una misma temperatura. La acción del viento y de la radiación son también elementos a considerar. Por una parte, el viento favorece los procesos de convección y evaporación. Por otra parte, para una misma temperatura en un lugar, el hecho de que éste esté soleado puede hacer más agradable la estancia en el mismo en invierno, no sólo por la luz sino por la radiación térmica que incide sobre la persona. De la misma forma, para una misma temperatura en una habitación la sensación térmica es más baja si paredes y suelo están aún fríos que si los mismos están ya calientes o incluso más calientes que el aire de la habitación

P1/

(i) Campo de T° y gradiente de T°

Hay variaciones de T° con el tiempo y la distribución de T° es no uniforme => dist. de T espacio-temporal: Campo de T°:

$$T = F(x, y, z, t)$$

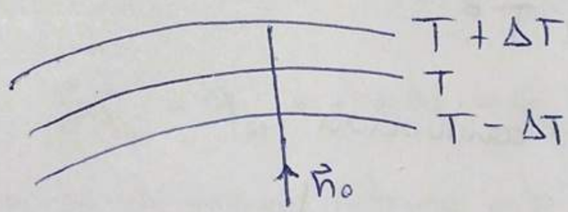
↳ Campo estacionario

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow T = F(x, y, z)$$

↳ Proceso unidimensional

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow T = F(x)$$

- Se denomina isoterma al lugar geométrico de los ptos. del cuerpo que están a la misma T°



La mayor variación relativa de T° es en la dirección normal a la sup. isotermas a la que apunta el gradiente

$$\vec{\nabla} \vec{T} = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k} = \frac{\partial T}{\partial n}\vec{n}_0$$

↳ derivada parcial de T en la dirección de las isotermas

- Flujo de calor. Ley de Fourier para medios isótropos.

↳ Flujo de calor ocurre en la dirección en la dirección perpendicular a las isotermas, sin comp. en las dirección tangentes a estas.

ley. de Fourier

$$\delta^2 Q_t = -\vec{n}_o\, k \frac{\partial T}{\partial n} \partial\vec{S}\partial t = -k\vec{\nabla}T\, \partial\vec{S}\, \partial t$$

k: conductividad térmica, capacidad de una sustancia para conducir el calor.

↳ A la cantidad de calor transmitido en la dirección del flujo (normal a las isotermas) por unidad de área ⊥ al flujo y por unidad de tiempo se le denomina densidad de flujo térmico

$$\vec{q} = \frac{\partial^2 Q_t}{\partial\vec{S}\partial t} = -\vec{n}_o \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\lambda\vec{\nabla}T \qquad [q] - W/m^2$$

, en la dirección normal a isotermas la densidad de flujo se representa por un escalar.

$$q = |\vec{q}| = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1)$$

(⇒ Densidad de flujo calórico es proporcional al gradiente de T°

(ii) Ecs. diferencial de conducción

Nos restringimos a que se cumple

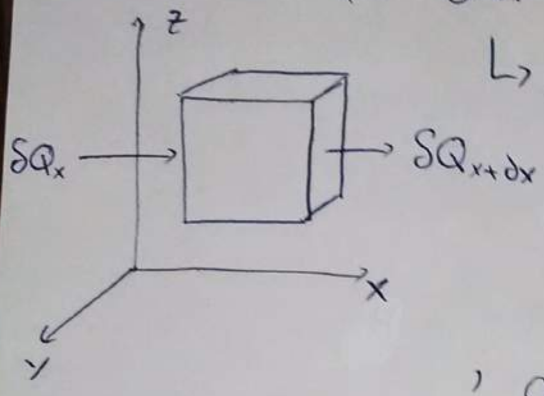
1. Medio homogeneo e ~~isotrópo~~ isótropo
2. Parametros físicos son constantes y uniformes.
3. Variaciones de volumen debidas a cambios de T° son pequeñas comparadas con el volumen del cuerpo. ⇒ Trabajo mecanico es practicamente nulo ($w = pdV$)
4. Fuentes internas de calor (~~se~~ dan energía por unidad de tiempo y volumen) $q_v = H = f(x,y,z,t)$ están distribuidas uniformemente en el cuerpo.

, El primer principio establece (conservación de la energía)

$$(2) \quad \delta Q_1 + \delta Q_2 = \partial U \rightarrow \text{variación de energía interna}$$

↳ calor aportado por fuentes internas

↳ calor neto intercambiado con el exterior



$$\delta Q_x = q_x \, \partial y \, \partial z \, \partial t$$

$$\delta Q_{x+\partial x} = q_{x+\partial x} \, \partial y \, \partial z \, \partial t$$

, $q_{x+\partial x} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \partial x$ (Taylor)

$\Rightarrow$ Calor neto que entra o sale en $\hat{x}$ es igual a:

$$\delta Q_{x_1} = (q_x - q_{x+\partial x}) \, \partial x \, \partial y \, \partial z \, \partial t = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \partial x \, \partial y \, \partial z \, \partial t$$

(Análogo para $\delta Q_{y_1} \wedge \delta Q_{z_1}$)

$\Rightarrow$ Balance neto total de calor a través de las caras

$$\delta Q_1 = -\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right] \partial x \, \partial y \, \partial z \, \partial t$$

Además,

$$\delta Q_2 = q_v \cdot \partial v \, \partial t = q_v \, \partial x \, \partial y \, \partial z \, \partial t$$

y la variación de energía interna está dada por (proceso a volumen constante) ($\partial v = \partial x \, \partial y \, \partial z$)

$$\partial U = \rho c_v \, \partial v \, \partial T = \rho c_v \, \partial v \frac{\partial T}{\partial t} \partial t$$

, luego, sustituyendo en (2)

$$-\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right] \partial v \, \partial t + H \, \partial v \, \partial t = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} \partial v \, \partial t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c_v}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \frac{q_v}{\rho c_v}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{\nabla} \vec{q} + q_{v}} \quad (3)$$

(iii) Ecs. Diferencial en un sólido isótropo

↳ Los solidos isotropos obedecen la ley de Fourier para medios isotropos ($\vec{q} = -K\vec{\nabla}T$), en solidos este mecanismo es predominante.

Se cumple que $c_p \simeq c_v \simeq c$, recordando (3)

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{\nabla}\vec{q} + q_v \text{ , recordando (1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho \cdot c}\vec{\nabla}(-K\vec{\nabla}T) + \frac{q_v}{\rho \cdot c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho \cdot c}\nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c}\nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho \cdot c} \text{ , } /\cdot \rho c \text{ ; y definiendo } H = \frac{q_v}{\rho}$$

$$\Rightarrow \left[K\nabla^2 T = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \rho \cdot H\right] \Leftrightarrow$$

Ecs. dif. de conducción de calor (solido isotropo)

→ Si no hay fuentes internas de calor: Ecs. de Fourier

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho \cdot c}\nabla^2 T\right]$$

→ ~~Ademas~~, si el sistema está en un estado estacionario:

Ecs. de Poisson $\left[\nabla^2 T = -\frac{\rho}{K}H\right]$

→ Sin fuentes de calor, y en estado estacionario:

Ecs. de Laplace $\left[\nabla^2 T = 0\right]$

(iv) Condiciones para resolver el problema

→ Geométricas (Sist. de coordenadas adecuadas)

→ Prop. físicas (de la sustancia donde hay conducción (K, ρ, c))

→ Distribución inicial ($T_0 = f(x, y, z, t_0)$)

→ Condiciones de contorno → Primera especie (en superficie)

$$T = f(x, y, z, t)$$

→ Segunda especie (en la derivada en la superficie)

$$q_s = f(x, y, z, t)$$

$$\left[\vec{q}_s = -K \vec{\nabla} T \right]$$

P2| Conducción de calor $\left[k \nabla^2 T = c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \rho H \right]$

Flujo calorico $\left[q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \right]$

1) Gradiente Geotermico [Solución de ec. de conducción estacionario]

(a) $k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\rho H$ Condiciones: $T(z=0) = T_0$ (1)

(2) $q(z=0) = q_s = -k \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\rho}{k} H z + c_1 \overset{(2)}{\Rightarrow} c_1 = \frac{q_s}{k}$$

$$T(z) = \frac{-\rho}{k} H \frac{z^2}{2} + \frac{q_s}{k} z + c_2$$

(1) $T(z=0) = T_s \Rightarrow c_2 = T_s$

$$\Rightarrow \left[T(z) = T_s + \frac{q_s}{k} z - \frac{\rho H}{2k} z^2 \right]$$

(b) Flujo calorico estacionario de una esfera

$$\nabla^2 T = -\frac{\rho H}{k}$$, en coordenadas ~~cilindric~~ esf.

· Condiciones:

$T(r=a) = T_0$

$T(0)$ definido

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) = -\frac{\rho}{k} H$$

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{-\rho H}{k} \frac{r^3}{3} + c_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\rho H}{k} \frac{r}{3} + c_1 r^{-2} \quad (i)$$

$$T(r) = -\frac{\rho H}{k}\frac{r^2}{6} + \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$T(r=a) = T_0 \qquad * \; T(0) \neq 0 \;\; (T(0) \text{ definido})$$

$$\left[T(0) \xrightarrow{\text{def.}} C_1 = 0 \right] \rightarrow T_0 = -\frac{\rho H}{6k} a^2 + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \left[T(r) = T_0 + \frac{\rho H}{6k}(a^2 - r^2) \right] \; (ii)$$

¿Cual será la T° del centro de la tierra si fuera modelada como una esfera con una producción de calor volumétrico constante?

→ Para los valores medibles en la tierra

$$q_0 = 70 \frac{mW}{m^2} \xrightarrow{(i)} -q_0 = -k \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{\rho H a}{3}$$

$$\cdot \; q_0 = \frac{\rho H a}{3}$$

$k = 4 \; W/mK$

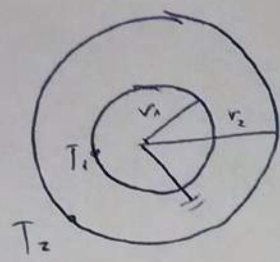
$T_0 = 300° k$

$a = 6371 \; km$

$$(ii) \; T(r) = T_0 + \frac{q_0 a}{2k}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$\left[T(0) = T_0 + \frac{q_0 a}{2k} \sim 5600 °k \right]_{//}$$

P3



$$\left.\begin{array}{l} T(r_1) = T_1 \\ T(r_2) = T_2 \end{array}\right\} \text{Condiciones (ii)}$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (i)$$

Laplaciano en cilíndricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

solo tenemos dependencia en ρ (en r)

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$$

, ~~veg~~ derivada de producto

$$\frac{\partial T}{\partial r} + r\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$(i) \Rightarrow r\frac{\partial T}{\partial r} = C_1 \longrightarrow \partial T = C_1 \frac{\partial r}{r}$$

solución (i): $T(r) = C_1 \ln(r) + C_2$

$$(ii) \Rightarrow T(r_1) = T_1 \Rightarrow C_2 = T_1 - C_1 \ln(r_1)$$

$$T(r_2) = T_2 \Rightarrow C_2 = T_2 - C_1 \ln(r_2)$$

C_2 tiene que tener un valor único, ind. de las condiciones

Sea $C_2 = 0$

$$T_1 - C_1 \ln(r_1) = T_2 - C_1 \ln(r_2)$$

$$\Rightarrow C_1 = T_1 - T_2 / \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

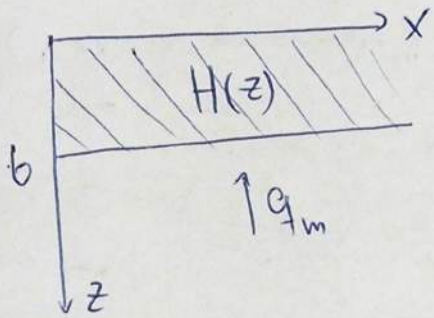
luego, $T(r) = \dfrac{T_1 - T_2}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \ln(r)$

, el flujo calórico está dado por $q = k\left(\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$

, en $r = r_2$

$$\left[q_0 = k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_2} = k\,\frac{(T_1 - T_2)}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \frac{1}{r_2} \right]$$

P41



Condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} H(z=0) = H_0 \\ H(z=b) = 0 \end{array}\right\} H(z) = -\frac{H_0}{b} z + H_0$$

$$q(z \geq b) = q_m$$

(estacionario) $\qquad T(z=0) = T_0$

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\rho H \quad , \int \text{integramo}$$

$$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-\rho}{k} \int \left(-\frac{H_0}{b} z + H_0\right) \partial z$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-\rho}{k}\left[-\frac{H_0}{b}\frac{z^2}{2} + H_0 z\right] + C_1$$

Condición $\Rightarrow q_m = -\rho\left[-\dfrac{H_0}{2b} b^2 + H_0 b\right] + C_1 k$

$$\Rightarrow C_1 = \left(q_m + \rho \frac{H_0 b}{2}\right)\frac{1}{k}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-\rho}{k}\left[-\frac{H_0}{b}\frac{z^2}{2} + H_0 z\right] + \frac{1}{k}\left[q_m + \rho\frac{H_0 b}{2}\right] \quad , \int \text{int.}$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{-\rho}{k}\left[-\frac{H_0}{6b} z^3 + \frac{H_0}{2} z^2\right] + \left[\frac{q_m}{k} + \rho\frac{H_0 b}{2k}\right] z + C_2$$

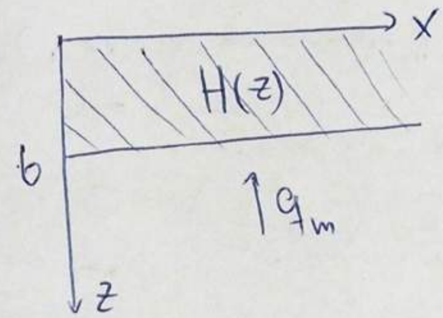
luego, $$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \ln(r)$$

, el flujo calórico está dado por $$q = k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

, en $r = r_2$

$$\left[q_0 = k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_2} = k\,\frac{(T_1 - T_2)}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \frac{1}{r_2} \right]$$

P41



Condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} H(z=0) = H_0 \\ H(z=b) = 0 \end{array}\right\} H(z) = -\frac{H_0}{b} z + H_0$$

$$q(z \geq b) = q_m$$

(estacionario) $$T(z=0) = T_0$$

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\rho H \quad , \int \text{integramos}$$

$$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-\rho}{k}\int\left(-\frac{H_0}{b} z + H_0\right)\partial z$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-\rho}{k}\left[-\frac{H_0}{b}\frac{z^2}{2} + H_0 z\right] + C_1$$

Condición $$\Rightarrow q_m = -\rho\left[-\frac{H_0}{2b} b^2 + H_0 b\right] + C_1 k$$

$$\Rightarrow C_1 = \left(q_m + \rho\frac{H_0 b}{2}\right)\frac{1}{k}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-\rho}{k}\left[-\frac{H_0}{b}\frac{z^2}{2} + H_0 z\right] + \frac{1}{k}\left[q_m + \rho\frac{H_0 b}{2}\right] \quad , \int \text{int.}$$

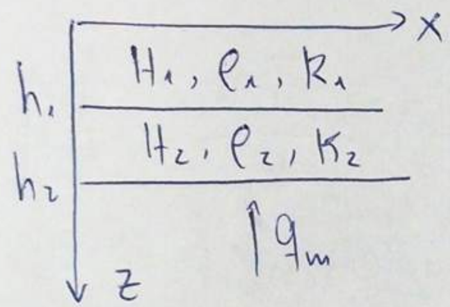
$$\Rightarrow T(z) = \frac{-\rho}{k}\left[-\frac{H_0}{6b} z^3 + \frac{H_0}{2} z^2\right] + \left[\frac{q_m}{k} + \rho\frac{H_0 b}{2k}\right] z + C_2$$

Condición: $T(z=0) = T_0 \Rightarrow T_0 = C_2$

Finalmente,

$$T(z) = T_0 + \frac{1}{k}\left[\frac{\rho H_0}{6b} z^3 - \frac{\rho H_0 z^2}{2} + q_m \cdot z + \frac{\rho H_0 b}{2} z\right]$$

P5| Considere un modelo de dos capas ... (estacionario)



$$k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\rho H$$

$\underline{h_1 < z < h_2}$

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = -\rho_2 \frac{H_2}{k_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dz} = -\rho_2 \frac{H_2}{k_2} z + C_1$$

$\underline{0 < z < h_1}$

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = -\rho_2 \frac{H_1}{k_1}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dz} = -\rho_1 \frac{H_1}{k_1} z + C_2$$

, Condiciones: Flujo no se puede acumular en la interface, tiene que haber continuidad de flujo en la interface

$$\Leftrightarrow k_2\left(-\rho_2 \frac{H_2 z}{k_2} + C_1\right)\Big|_{h_1} = k_2\left(-\rho_2 \frac{H_1}{\rho_1} z + C_2\right)\Big|_{h_1} \quad (i)$$

(1 ecs., 2 cte.) [Deseo determinar $q_0 = q(z=0)$]

Además, Puedo expresar $C_1 \wedge C_2$ en fn. de $q_m \wedge q_0$

$$h_1 < z < h_2 \longrightarrow q_m = -\rho_2 H_2 h_2 + C_1 k_2$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{q_m + \rho_2 H_2 h_2}{k_2}$$

$$0 < z < h_1 \longrightarrow q_0 = C_2 k_1 \Rightarrow C_2 = \frac{q_0}{k_1}$$

Reemplazando en (i)

$$\Rightarrow k_2\left[-\frac{\rho_2 H_2 h_1}{k_2} + \frac{q_m + \rho_2 H_2 h_2}{k_2}\right] = k_1\left[-\frac{\rho_1 H_1 h_1}{k_1} + \frac{q_0}{k_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow q_0 = -\rho_2 H_2 h_1 + q_m + \rho_2 H_2 h_2 + \rho_1 H_1 h_1$$